Concurs RMCS 2010 , Barem de corectare Clasa VII

1) (7 puncte)	Notăm cu b numărul băieților participanți şi cu f numărul fetelor, iar cu n numărul total de participanți. Avem astfel: $\frac{b(b-1)}{2}=15 \Rightarrow b=6$ (4 puncte) Din $\frac{f(f-1)}{2}+6f=45-15=30 \Rightarrow f=4$ (3 puncte) Variantă: $\frac{n(n-1)}{2}=45 \Rightarrow n=10 \Rightarrow f=10-6=4$
2) (7 puncte)	$\frac{DC}{DB}=2$ şi $BA=BF \Rightarrow D$ este centru de greutate în triunghiul *ACF*, (2 puncte) de unde avem că *G* este mijlocul lui *(FC)*. (1 punct) Cu teorema lui Menelaus în triunghiul *BFC* avem: $\frac{EB}{EC}\cdot\frac{GC}{GF}\cdot\frac{HF}{HB}=1 \Rightarrow 2HF=HB$, (2 puncte) deci *F* este mijlocul lui *(BH)*, (1 punct) aşadar $HF=FB=AB$. (1 punct)
3) (7 puncte)	Aşadar $\sqrt{2n+1}=m^2,\ cu\ m\in\mathbb{N}$. Pentru ca numerele date să fie iraționale este necesar şi suficient ca $3n+3<(m+1)^2$ (3 puncte) Această ultimă condiție conduce la: $3\cdot\frac{m^2-1}{2}+3<(m+1)^2 \Rightarrow m^2-4m+1<0$ (2 puncte) Cum m este număr natural impar deducem imediat $m\in\{1,3\}$ Şi deci $n\in\{0,4\}$ (2 puncte) Obs. Doar încercări succesive care conduc la rezultatul corect: (2 puncte)
4) (7 puncte)	a) Notez $BD=x$ şi cu teorema bisectoarei obținem imediat $DC=3x$ (2 puncte) Cum $BC<AB+AC \Rightarrow 4x<16 \Rightarrow x<4$ (1 punct) Avem acum: $\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}=\frac{4}{3x}>\frac{1}{3}$; (1 punct) b) Paralela prin C la AD intersectează dreapta AB în E şi avem imediat că triunghiul AEC este isoscel ($AC=AE=12$) (1 punct) Din $\frac{AD}{CE}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{4} \Rightarrow AD=\frac{CE}{4}<\frac{AC+AE}{4}=\frac{2AC}{4}=6$ (2 puncte)