CLASA a VII-a

Problema 1

Să se determine toate perechile de numere naturale $(d; n)$, $d \geq 2$, $n \geq 2$ cu proprietatea $d \mid (n - 1)^2 + 1$ şi $d \mid (n + 1)^2 - 1$.

Barem:

Din $d \mid (n - 1)^2 + 1 \Rightarrow d \mid (n^2 - 2n + 2)$ (1)
Din $d \mid (n + 1)^2 - 1 \Rightarrow d \mid (n^2 + 2n)$ (2)
Din (1) şi (2) $\Rightarrow d \mid (n^2 + 2n) - (n^2 - 2n + 2) \Rightarrow d \mid (4n - 2)$ (3) **1p**

Din (2) şi (3) $\Rightarrow d \mid [4(n^2 + 2n) - n(4n - 2)] \Rightarrow d \mid 10n$ (4) **1p**

Din (3) şi (4) $\Rightarrow d \mid [2 \cdot 10n - 5(4n - 2)] \Rightarrow d \mid 10$ **1p**

Dacă d = 2, din (2) $\Rightarrow 2 \mid n$, obţinând perechile (2 ; 2k) cu $k \geq 1$ care verifică cerinţele iniţiale **1p**

Dacă d = 5, din (3) $\Rightarrow 5 \mid 4(4n - 2) \Rightarrow 5 \mid (n + 2) \Rightarrow n = 5k - 2$, obţinând perechile (5 ; 5k - 2) cu $k \geq 1$ care verifică cerinţele iniţiale.......................... **1p**

Dacă d = 10, din (3) $\Rightarrow 5 \mid (2n - 1) \Rightarrow n = 5k - 2$, obţinând perechile (10 ; 5k - 2) cu $k \geq 1$ **1p**
Verificând condiţiile iniţiale, din $10 \mid (25k^2 - 30k + 10)$ şi $10 \mid (25k^2 + 10k) \Rightarrow$ k este număr par şi rămân doar perechile (10 ; 10k - 2) cu $k \geq 1$ **1p**

Observaţie: Perechile care verifică condiţiile problemei sunt:
(2 ; 2k); (5 ; 5k - 2) şi (10 ; 10k - 2) cu $k \geq 1$

CLASA a VII-a

Problema 2

Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ..... \cdot n$.

Considerăm mulţimea $F = \left\{ \frac{(p-1)!}{p} \middle| p \in \mathbf{N}^* \right\}$, unde p este număr prim.

c) Arătaţi că mulţimea F şi mulţimea numerelor naturale sunt disjuncte.

d) Arătaţi că suma unui număr finit de elemente diferite ale lui F nu este număr natural.

Barem:

a) Cum p este număr prim $\Rightarrow$ p şi orice factor al numărului $(p-1)!$ sunt numere prime între ele; astfel fiecare element din mulţimea F este o fracţie ireductibilă, cu numitorul cel puţin 2 .... **4p**

b) Presupunem, prin absurd, că există un număr k > 1 şi $x_1, x_2, ..., x_k \in F$ astfel încât $x_1 + x_2 + ...+ x_k = a$, cu $a \in$ **N** **(1)** **1p**

Fie $x_j = \frac{(p_j - 1)!}{p_j}$, cu $1 \leq j \leq k$ şi p_j număr prim.

Înmulţind egalitatea (1) cu $P = p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_k$ se obţine:

$$\frac{p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_k}{p_1}(p_1 - 1)! + \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_k}{p_2}(p_2 - 1)! + ... + \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_k}{pk}(p_k - 1)! = p_1 \cdot p_2 \cdot .... \cdot p_k \cdot a$$ ...**1p**

Cum p_1 divide membrul drept, dar nu şi pe cel stâng se ajunge la o contradicţie.

Deci presupunerea făcută este falsă... **1p**

CLASA a VII-a

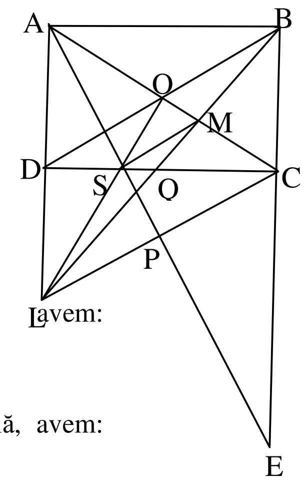
Problema 3

Fie dreptunghiul ABCD, cu m($\angle$DAC) = 60°, iar (AS bisectoarea unghiului DAC, S $\in$ (DC). Dacă {E} = AS $\cap$ BC, {O} = AC $\cap$ BD, {L} = AD $\cap$ OS, să se arate că:

a) SM $\parallel$ CL, unde {M} = CO $\cap$ BL;

b) patrulaterul ACEL este romb.

Barem:



a) Din ΔADC drepunghic în D, cu m($\angle$C) = 90° $\Rightarrow$ AC = 2AD **0,5p**

În ΔADC, aplicând teorema bisectoarei, cu [AS] bisectoare, avem: $\frac{DS}{SC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$ **0,5p**

În ΔADC, aplicând teorema lui Menelaus, cu dreapta OL transversală, avem: $\frac{\text{DS}}{\text{SC}} \cdot \frac{\text{CO}}{\text{OA}} \cdot \frac{\text{AL}}{\text{DL}} = 1$ **0,5p**

Ţinând cont că $\frac{\text{DS}}{\text{SC}} = \frac{1}{2}$ şi CO = OA avem $\frac{\text{AL}}{\text{DL}} = 2 \Leftrightarrow$ AD = DL **0,5p**

Obţinem că [CD] este mediană şi înălţime în ΔACL, deci AC = CL... **0,5p**

Cum AC = CL şi m($\angle$CAL) = 60° $\Rightarrow$ ΔACL este echilateral............**0,5p**

Vom obţine astfel că S este centrul triunghiului ALC echilateral (*).............**0,5p**

Avem D mijlocul lui (AL) $\Rightarrow$ AD = DL şi cum AD = BC $\Rightarrow$ DL = BC.
Dar DL $\parallel$ BC, care împreună cu DL = BC ne dă că DBCL este paralelogram...........**0,5p**

Fie {Q} = BL $\cap$ CD $\Rightarrow$ DQ = QC şi DO = OB sau [BQ], [CO] mediane în ΔDBC. Cum BQ $\cap$ CO = {M}, vom obţine că M este centrul de greutate al triunghiului BDC.

Prin urmare, $\frac{\text{MO}}{\text{CM}} = \frac{1}{2}$, iar din (*), $\frac{\text{SO}}{\text{SL}} = \frac{1}{2}$ **0,5p**

Avem că $\frac{\text{MO}}{\text{CM}} = \frac{\text{SO}}{\text{SL}}$

Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că SM $\parallel$ CL **0,5p**

b) Comparând ΔALP cu ΔECP, avem: LP = PC (din a)) şi m($\angle$LAP) = m($\angle$CEP) = 30° (alterne interne) $\Rightarrow$ ΔALP $\equiv$ ΔECP $\Rightarrow$ PA = PE.. **1p**

Din relaţiile AP = PE, LP = PC şi AE $\perp$ LC, obţinem că ACEL este romb..............**1p**

CLASA a VII-a

Problema 4

Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 120^\circ$ şi AB = 10 cm.

Se consideră punctele E $\in$ (AB), F $\in$ (AC) astfel încât CF = BE = 4 cm.

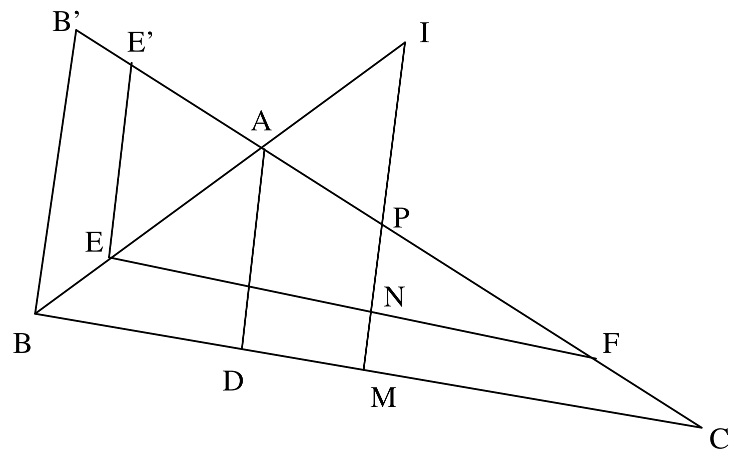
Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor [BC], respectiv [EF], calculaţi:

a) $m(\angle BIM)$ unde AB $\cap$ MN = {I};

b) lungimea segmentului [MN].

prof.Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

Barem:



Prelungim CA cu AB' = AB = 10 cm şi AE' = AE = 6cm $\Rightarrow$ Δ AEE' şi Δ ABB' echilaterale ….**2p**

Dacă (AD este bisectoarea lui $\angle$BAC $\rightarrow$ AD ∥ EE' ∥ BB'……………………………………..….**1p**

Cum FC = EB = E'B' $\rightarrow$ [B'C] şi [E'F] au acelaşi mijloc P ………………………..……….....**1p**

Avem $\begin{cases} PN \parallel E'E \parallel AD \\ PM \parallel B'B \parallel AD \end{cases}$ $\rightarrow$ P, M, N coliniare ....……...**1p**

Atunci:

a) IM ∥ AD $\rightarrow$ $m(\angle BIM) = 60^\circ$ ....……...**1p**

b) MN = PM – PN = $\frac{BB'}{2} - \frac{EE'}{2} = \frac{10-6}{2} = 2$ cm.…….…………………………….……..…….**1p**

Notă: Pentru orice demonstraţie corectă se acordă **4p** la subpunctul **a)** şi **3p** la subpunctul **b)**.