

CONCURSUL NAȚIONAL

„LA ȘCOALA CU CEAS”

Ediția a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A V-a

1. Se consideră numerele naturale a_1, a_2, \dots, a_{102} astfel încât

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{102} < 307.$$

a) Câte valori distincte poate lua suma $a_1 + a_2 + \dots + a_{102}$?

b) Efectuând toate diferențele a oricăror două numere vecine, $a_{k+1} - a_k$, arătați că una dintre aceste diferențe se repetă de cel puțin 21 de ori.

Prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

2. Fie mulțimea $M = \{1; 2; 3; \dots; 2010\}$.

a) Putem alege 1008 elemente din mulțimea M astfel încât așezate pe un cerc, suma oricăror două numere vecine să fie divizibilă cu 3? Justificați!

b) Putem alege 1008 elemente din mulțimea M astfel încât așezate pe un cerc, suma oricăror două numere vecine să fie divizibilă cu 4? Justificați!

Prof. Sorana și Răzvan Dinu, Slobozia

3. a) Să se arate că 999999 este divizibil cu 142857;

b) Să se determine cel mai mic număr natural cu suma cifrelor egală cu 2010;

c) Să se determine restul împărțirii la 14 a numărului determinat la subpunctul b .

Prof. Beatrice și Emil Ciolan, Slatina

4. Fie $A = \{1, 2, 3, \dots, 2010\}$. O mulțime $B \subset A$ are proprietatea P dacă

$$B = \{a, b, c, d\} \text{ cu } a, b, c, d \text{ divizibile cu } 134 \text{ și } a + b + c + d = 2010.$$

a) Dați un exemplu de mulțime B cu proprietatea P ;

b) Determinați toate mulțimile B care au proprietatea P ;

c) Demonstrați că reuniunea tuturor mulțimilor B care au proprietatea P se poate scrie ca o reuniune de trei mulțimi disjuncte două câte două, având suma elementelor fiecăreia aceeași.

Prof. Constantin Bărăscu și Marin Mazilu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL
„LA ȘCOALA CU CEAS”
Ediția a XIII-a
Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A VI-a

1. a) Să se determine numărul rațional N pentru care este adevărată egalitatea :

$$\frac{6}{5} + \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{6}{5} \cdot N;$$

b) Să se calculeze suma $S = \frac{2010}{2009} + \frac{2010 \cdot 2008}{2009 \cdot 2007} + \frac{2010 \cdot 2008 \cdot 2006}{2009 \cdot 2007 \cdot 2005} + \dots + \frac{2010 \cdot 2008 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{2009 \cdot 2007 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}$.

Prof. Cecilia Deaconescu, Pitești
Prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

2. Se consideră mulțimea $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2010}\} \subset \mathbf{N}$.

Dacă $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$, ..., $a_{2009}^2 = a_{2008} \cdot a_{2010}$ și $a_{101} = 10^{101}$, $a_{1001} = 10^{1001}$, calculați a_{2010} .

Prof. Răzvan Dinu , Slobozia
Prof. Daniela Mihalache, Slobozia

3. În triunghiul ABC, [BD] este înălțimea din B, iar [BP] este bisectoarea unghiului ABD ($D, P \in AC$). Dacă $m(\angle PBC) = 45^\circ$ demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

Prof. Gabriel Popa, Iași

4. Fie 2011 puncte distincte cu proprietatea că oricare trei sunt necoliniare.

a) Care este numărul de drepte determinate de aceste puncte ?

Dacă unim arbitrar punctele între ele astfel încât prin fiecare punct să treacă cel puțin o dreaptă, demonstrați că :

b) Există cel puțin un punct prin care trec un număr par de drepte;

c) Numărul punctelor prin care trec un număr par de drepte este impar.

Prof. Constantin Bărașcu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL

„LA ȘCOALA CU CEAS”

Ediția a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A VII-a

1. Să se determine toate perechile de numere naturale $(d; n)$, $d \geq 2$, $n \geq 2$ cu proprietatea $d \mid (n - 1)^2 + 1$ și $d \mid (n + 1)^2 - 1$.

Prof. Maria și Vasile Pop, Cluj

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Considerăm mulțimea $F = \left\{ \frac{(p-1)!}{p} \mid p \in \mathbf{N}^* \right\}$, unde p este număr prim.

- a) Arătați că mulțimea F și mulțimea numerelor naturale sunt disjuncte.
- b) Arătați că suma unui număr finit de elemente diferite ale lui F nu este număr natural.

Prof. Gabriela și Constantin Bușe, Timișoara

3. Fie dreptunghiul ABCD, cu $m(\angle DAC) = 60^\circ$, iar (AS bisectoarea unghiului DAC, $S \in (DC)$). Dacă $\{E\} = AS \cap BC$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{L\} = AD \cap OS$, să se arate că:

- a) $SM \parallel CL$, unde $\{M\} = CO \cap BL$;
- b) patrulaterul ACEL este romb.

Prof. Manea Cosmin și Petrică Dragoș, Pitești

4. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 120^\circ$ și $AB = 10$ cm.

Se consideră punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $CF = BE = 4$ cm.

Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor [BC], respectiv [EF], calculați:

- a) $m(\angle BIM)$ unde $AB \cap MN = \{I\}$;
- b) lungimea segmentului [MN].

Prof. Constantin Bărbăscu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAȚIONAL

„LA ȘCOALA CU CEAS”

Ediția a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A VIII-a

1. a) Demonstrați că $4p^2 + q^2 + 1 > 2p(q+1)$ pentru orice $p, q \in \mathbf{R}$.

b) Determinați cel mai mare $a \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$4p^2 + q^2 + 1 \geq 2ap(q+1), \quad \forall p, q \in \mathbf{R}.$$

c) Determinați cel mai mare $b \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$4p^2 + q^2 + 1 \geq 2bp(q+1), \quad \forall p, q \in \mathbf{Z}.$$

prof. Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea

2. Suma a $2n$ numere naturale distincte este mai mică decât $3n^2$. Să se arate că printre acestea există două din ele cu suma $2n + 1$.

Prof. Maria și Vasile Pop, Cluj

3. Fie BCD un triunghi cu $BC = 6$ cm, $CD = 12$ cm și $m(\angle B) = 90^\circ$. Pe ipotenuza (CD) se consideră un punct E astfel încât $BE^2 = CE \cdot ED$. Pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară în B pe care se consideră un punct A astfel încât $AB = 6\sqrt{3}$ cm.

Fie F și G proiecțiile lui B pe AC și respectiv AE.

a) Să se afle distanța de la punctul D la dreapta AC.

b) Stabiliți dacă D, G și F sunt coliniare.

Prof. Ștefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

4. Pătratul ABEF de latură “a” și dreptunghiul ABCD sunt situate în plane

perpendiculare. Demonstrați că $d(AC, BF) = \frac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m(\angle(BF, AC)) = 60^\circ$.

Prof. Constantin Bărbăscu și Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.