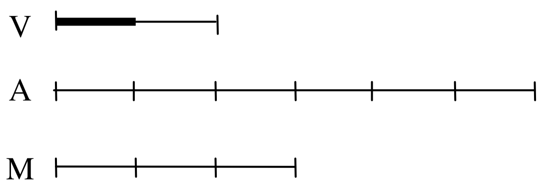
CLASA a V-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. La un campionat de fotbal, Andrei, Mihai și Vasile au marcat împreună 22 de goluri. Andrei a marcat de trei ori mai multe goluri decât Vasile, iar Mihai jumătate din numărul golurilor marcate de Andrei. Câte goluri a marcat fiecare?



3 p

Dacă luăm o jumătate din segmentul care reprezintă numărul golurilor marcate de Vasile , 1p
observăm că la Andrei sunt 6 astfel de "bucăți" iar la Mihai 3, în total 11 "bucăți" . . . 1 p
Deci "bucata" respectivă reprezintă 22: 11 = 2 (goluri) . . . . . . 1 p
Prin urmare Vasile a marcat 4 goluri, Andrei 12 și Mihai 6. . . . . 1 p

1. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$, scrise în baza 10, astfel încât
$$\overline{abc} = \overline{cba} + \overline{ab} + \overline{ba} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{cb}.$$

Relația dată conduce la $100a + 10b + c = 23a + 32b + 122c$
Adică $77a = 22b + 121c \iff 7a = 2b + 11c$
Pentru că $7a \le 7 \cdot 9 = 63 \Rightarrow c \le 5$
$c = 1$, duce la $7a = 2b + 11 = 2b + 4 + 7 = 2(b+2) + 7$ de unde rezultă $(b+2) \vdots 7$,
adică $b = 5$, $7a = 21$ și $a = 3$; avem 351 1p
$c = 2$, duce la $7a = 2b + 22 = 2b + 8 + 14 = 2(b+4) + 14$, apoi $(b+4) \vdots 7$
prin urmare $b = 3$ și $a = 4$; avem 432 1p
$c = 3$, duce la $7a = 2b + 33 = 2b + 5 + 28$, $(2b+5) \vdots 7$, $b = 1$ și $a = 5$
$= 2b + 35 - 2 = 2(b-1) + 35$, $(b-1) \vdots 7$, $b = 8$ și $a = 7$
Se obțin numerele 513 și 783 1p
$c = 4$, $7a = 2b + 44 = 2(b+1) + 42$, $b = 6$ și $a = 8$; avem 864 1p
$c = 5$, $7a = 2b + 55 = 2b + 6 + 49 = 2(b+3) + 49$, cu $b = 4$ și $a = 9$; 945 soluție 1p

3. Există 5 numere naturale a, b, c, d și e cu proprietatea că suma a oricăror patru dintre ele dă restul 1 prin împărțirea la 4 ?

Presupunem că există astfel de numere, prin urmare am avea:
$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d &= M_4 + 1 \\ a+b+c+e &= M_4 + 1 \\ a+b+d+e &= M_4 + 1 \\ a+c+d+e &= M_4 + 1 \\ b+c+d+e &= M_4 + 1 \end{aligned}\right\} 5p$$

Dacă adunăm membru cu membru obținem $4(a+b+c+d+e) = M_4 + 5 = M_4 + 1$ 1p
Ceea ce este imposibil, prin urmare nu există astfel de numere. 1p

CLASA a VI-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 17 dau câtul egal cu restul și împărțite la 23 dau , de asemenea , câtul egal cu restul.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ așa încât $n = 17 \cdot q + q$, $q < 17,\ q \in \mathbb{N}$ . . . . . 1 p

$n = 23 \cdot r + r$, $r < 23,\ r \in \mathbb{N}$ . . . . . 1 p

de unde $n = 18q \quad cu \quad 0 \le q \angle 17$ . . . . 0,5 p

$n = 24r \quad cu \quad 0 \le r \angle 23$ . . . . 0,5 p

Din $18q = 24r$ rezultă $3q = 4r$ . . . . 1,5 p

Deci $q = 4a,\ r = 3a$ cu $a \in \mathbb{N}$ și $a \le 4$ . . . . . 1 p

Rezultă $n = 18 \cdot 4a = 72a,\ a = 0, 1, 2, 3, 4$ . . . . 1 p

Deci $n \in \{0, 72, 144, 216, 288\}$ . . . . 0,5 p.

2. Determinați m , n numere naturale astfel încât $2^m - 2^n = 120$.

Deoarece $2^m > 2^n$ rezultă $m > n$. Fie $p=m-n \in \mathbb{N}$ . . . . . . 2 p

Atunci $2^{n+p} - 2^n = 120 \Leftrightarrow 2^n(2^p - 1) = 2^3 \cdot 15$ . . . . 2 p

Pt. că $2^p - 1$ este impar, este necesar ca

$\begin{cases} 2^n = 2^3 \\ 2^p - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ 2^p = 16 = 2^4 \end{cases} \Leftrightarrow n = 3$ și $p = 4$ . . . . 2 p

Deci $m = n + p = 3+4 = 7$ . . . . 1 p

3. Arătați că numărul $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2010 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right)$

este natural și se divide cu 2011.

$x = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2009 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 \in \mathbb{N}$ 2p

Apoi:

$x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2010}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2009}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1005} + \frac{1}{1006}\right)\right]$ 2p

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010\left[\frac{2011}{1 \cdot 2010} + \frac{2011}{2 \cdot 2009} + \ldots + \frac{2011}{1005 \cdot 1006}\right] =$ 1p

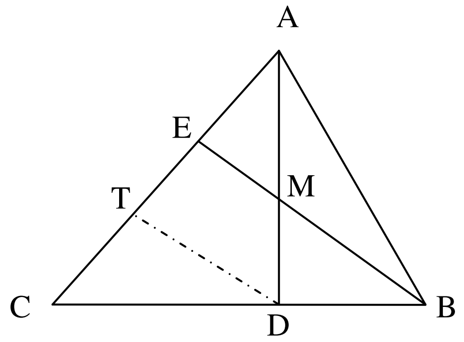
$= 2011[2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2009 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2008 \cdot 2010 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1004 \cdot 1007 \cdot \ldots \cdot 2010] =$ . . . 1p

$= 2011 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}$ de unde avem că 2011 îl divide pe x. 1p

CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME

1. În triunghiul *ABC*, *M* este mijlocul înălțimii *AD* ($D \in (BC)$), iar $E \in (AC)$ astfel încât $EC = 2AE$. Arătați că punctele *B, M , E* sunt coliniare dacă și numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.



Considerăm B, M și E sunt coliniare și construim $DT \| BE$ 1p

Atunci în ΔADT, ME este linie mijl. și $ET = AE = \frac{1}{2} EC$ 0,5p

De unde avem că T e mijlocul lui EC, adică DT linie mijlocie în ΔBCE și atunci D e mijlocul lui BC. 1p

Cum AD e înălțime și mediană, avem triunghi isoscel, adică $[AB] \equiv [AC]$. 1p

Reciproc; presupunem că $[AB] \equiv [AC]$, adică triunghiul ΔABC este isoscel. Cum AD este înălțime va fi și mediană, adică D este mijlocul lui BC. 1,5p

Construim $DT \| BE$ $\Rightarrow$ DT linie mijlocie în ΔBEC, T fiind mijlocul lui EC $\Rightarrow$ TE=AE 1p

Deci în ΔADT, ME este linie mijlocie și atunci $DT \| ME$. Dar prin E avem o singură paralelă la DT. Prin urmare B, M și E coliniare. 1p

2. Să se determine *a, b* $\in$ N știind că 1997 împărțit la *a* dă restul 2*b*-*a* și împărțit la *b* dă restul 2*a*-10.

Resturile sunt numere naturale sunt numere naturale, deci $2a - 10 \geq 0$, $2b - 9 \geq 0$ de unde avem că $a \geq 5$ și $b \geq 5$. 1p

Cum restul e mai mic decât împărțitorul, $2b - 9 \angle a$ *iar* $2a - 10 \angle b$ 1p

Atunci b>2a-10>2(2b-9)-10 $\Rightarrow$b>4b-28$\Rightarrow$3b<28 adică $b \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ 1p

În plus, b nu poate fi par (restul împ. lui 1997 la b este 2a-10 care este par) deci $b \in \{5, 7, 9\}$ 1p

Dacă b=5, avem 1997=5·399+2, adică a=6 și cum 1997=6·332+5, 2b-9=5 adică b=7≠5. Valoarea nu convine 1p

Dacă b=7, avem 1997=7·285+2, adică a=6, din nou 1997=6·332+5, 2b-9=5 adică b=7, deci a=6 și b=7 1p

Dacă b=9, avem 1997=9·221+8, adică a=9. Avem 1997=9·221+8 adică 2b-9=8, imposibil.

În concluzie a=6 și b=7. 1p

3. Dacă *x, y, z, t* sunt numere reale, atunci

$$(-x + y + z + t)^2 + (x - y + z + t)^2 + (x + y - z + t)^2 + (x + y + z - t)^2 + \frac{1}{4} \geq x + y + z + t$$

Precizați cazul de egalitate.

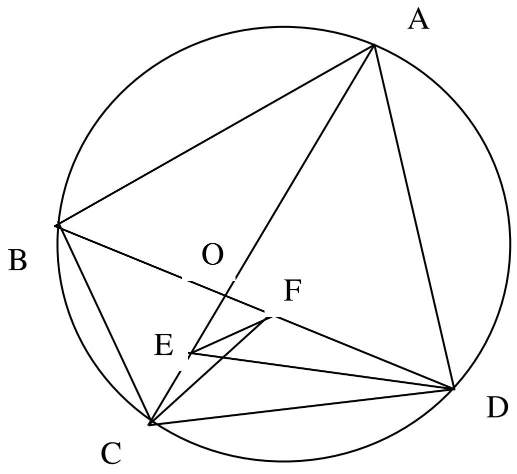
După ridicările la pătrat, se obține inegalitatea $4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - x - y - z - t + \frac{1}{4} \geq 0$ 2p

care este echivalentă cu $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2z - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2t - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0$ ineg evidentă 4p

Pentru $x = y = z = t = \frac{1}{8}$ se realizează egalitatea 1p

CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME

1. Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, $E \in (OC)$ și $F \in (BD)$, să se demonstreze că $EF \parallel AB$ dacă și numai dacă $\angle ADE \equiv \angle BCF$.



Presupunem că EF∥AB, atunci $D\hat{E}F \equiv B\hat{A}O$ (1) 1p

ABCD inscriptibil $\Rightarrow$ $B\hat{A}O \equiv B\hat{D}C$ (2) 0,5p

Din (1) și (2) rezultă $B\hat{D}C \equiv O\hat{E}F$ ceea ce conduce la faptul că patrulaterul DCEF este inscriptibil, deci $E\hat{D}F \equiv E\hat{C}F$ (3) 1,5p

Cum $B\hat{C}A \equiv B\hat{D}A$, împreună cu (3) dă $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$ 0,5p

Reciproc. Avem $A\hat{D}E \equiv B\hat{C}F$ (4), cum $B\hat{C}A \equiv B\hat{D}A$ (5) 0,5p

se ajunge la $E\hat{C}F \equiv E\hat{D}F$ și rezultă că CDEF este inscriptibil

Prin urmare $C\hat{D}B \equiv O\hat{E}F$ 2p

Din $B\hat{D}C \equiv B\hat{A}C \Rightarrow O\hat{E}F \equiv B\hat{A}D$ și așa rezultă EF∥AB 1p

2. Demonstrați că pentru orice n număr natural are loc inegalitatea

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

Ridicăm la pătrat fiecare membru al inegalității: 1p

$$n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+2\sqrt{1+4n}+1+4n}{4}$$

$$n+\sqrt{n+\cdots\sqrt{n+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+2n+\sqrt{1+4n}}{2}, \text{sau} \quad \sqrt{n+\ldots+\sqrt{n+\sqrt{n}}} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$$ 3p

Obs că membrul drept rămâne același. Ridicăm succesiv la pătrat și ajungem la 1p

$\sqrt{n} \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} \Leftrightarrow 0 \angle \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$, inegalitate evidentă. Prin urmare relația este adevărată. 2p

3. Fie a și n două numere naturale nenule. Arătați că numărul $x_n(a) = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{12n-1}$ se divide prin $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$.

Grupăm câte patru termeni : 1p

$$x_n(a) = (1+a+a^2+a^3) + a^4(1+a+a^2+a^3) + \ldots + a^{12n-4}(1+a+a^2+a^3) =$$
$$= (a+1)(a^2+1)(1+a^4+a^8+\ldots+a^{12n-4}) = (a+1)(a^2+1)y_n(a)$$ 2p

În $y_n(a)$ grupăm câte 3 termeni și avem: 1p

$$y_n(a) = 1+a^4+a^8+a^{12}(1+a^4+a^8)+\ldots+a^{12n-12}(1+a^4+a^8) =$$ 1p

$$= (1+a^4+a^8)(1+a^{12}+\ldots+a^{12n-12}) = (1+a^4+a^8)z_n(a)$$ 1p

Deci $x_n(a) = (a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)z_n(a)$ ceea ce arată că $x_n(a)$ este divizibil cu $(a+1)(a^2+1)(a^8+a^4+1)$. 1p