Concursul Interjudețean de Matematică „Teodor Topan”

Ediția a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Barem de corectare
Clasa a VII-a

1. In patrulaterul convex ABCD notam cu M mijlocul laturii BC si cu N mijloacul laturii CD. Fie P intersectia dreptelor AM si DB, iar Q intersectia dreptelor AN si DB. Demonstrati ca DQ=QP=PB daca si numai daca ABCD este paralelogram.

Barem de corectare

a) Presupunem mai intai ca ABDC este paralelogram si fie O punctul de intersectie a diagonalelor sale. Deoarece P este intersectia medianelor din AM si BO ale triunghiului ABC, el este centrul de greutate al acestui triunghi, deci PB=2/3 BO=1/3 DB. La fel se arata ca QD=1/3 DB.............................**3p**

(orice alta solutie corecta se puncteaza cu 3p)

b) Reciproc , sa presupunem ca PB=PQ=QD.

Atunci QN este linie mijlocie in triunghiul DPC, deci PC $\parallel$ AQ.

La fel, QC $\parallel$ AP, deci APCQ este paralelogram..**2p**

Rezulta ca AO=OC. Din OQ=OB si DQ=PB rezulta ca si DO =OB, deci diagonalele lui ABCD se injumatatesc, ceea ce ne arata ca ABCD este paralelogram...................................... **2p**

(orice alta solutie corecta pentru aceasta implicatie primeste 4p)

2. Pe laturile AB si AC ale triunghiului dreptunghic $ABC(m(\measuredangle A)=90^o)$ se considera respectiv punctele K, L, M, N astfel incat $m(\measuredangle KCB)=m(\measuredangle LCK)=\frac{1}{3}m(\measuredangle ACB)$ si $m(\measuredangle MBC)=m(\measuredangle NBM)=\frac{1}{3}m(\measuredangle ABC)$.

Fie P punctual de intersectie a dreptelor BM si CK, iar Q punctul de intersectie a dreptelor BN si CL.

Demonstrati ca $QP=QL=QN$.

Olimpiada Ucraina 2010

Barem de corectare

$m(\measuredangle LQB)=m(\measuredangle QBC)+m(\measuredangle QCB)=\frac{2}{3}m(\measuredangle B+\measuredangle C)=60^0$ **2p**

[QP este bisectoarea unghiului BQC (bisectoarele triunghiului BQC sunt concurrente), deci $m(\measuredangle BQP)=60^0$ **2p**

Din congruente triunghiurilor LQB si PQB (ULU) rezulta LQ=QP..**2p**

Prin simetrie, QP=QN...**1p**

3. a) Arătați că $\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

b) Determinați numărul natural nenul n astfel încât:

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 17}+...+\frac{2^{n-1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=\frac{2^{2010}-1}{3\left(2^{2011}+1\right)}$$ (Gazeta Matematica)

Barem:

a) Verificarea egalitatii..**3 p**

b) Volosirea egalitatii demonstrate la punctul a) si efectuarea calculelor...**4 p**

4. Un numar natural $m>1$ se numeste perfect daca suma tuturor divizorilor naturali ai sai este egala cu $2m$.

a) Aratati ca daca 2^n-1 este un numar prim, atunci numarul $2^{n-1}(2^n-1)$ este perfect (de exemplu, numarul 28 este perfect).

b) Demonstrati ca daca m este un numar perfect, iar $1=d_1<d_2<...<d_k=m$ sunt divizorii sai pozitivi, atunci $\dfrac{1}{d_1}+...+\dfrac{1}{d_k}=2$.

Barem de corectare

a) Fie $p=2^n-1$ si $a=2^{n-1}(2^n-1)$. Divizorii lui a sunt $1,2,...2^{n-1}$, $p,2p,...2^{n-1}p$ **2p**

Suma acestor divizori este $(1+...+2^{n-1})(p+1)=(2^n+1)\cdot 2^n=2a$. **2p**

b)Multimea $\{d_1,...,d_k\}$ a divizorilor lui m este aceeasi cu multimea $\{\dfrac{m}{d_1},...,\dfrac{m}{d_k}\}$..**2p**

Egaland suma elementelor, obtinem $d_1+...+d_k=m(\dfrac{1}{d_1}+...+\dfrac{1}{d_k})$, adica $2m=m(\dfrac{1}{d_1}+...+\dfrac{1}{d_k})$, de unde rezulta egalitatea din enunt..**1p**