Concursul Interjudeţean de Matematică „Teodor Topan”
Ediţia a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Clasa a VII-a

1. În patrulaterul convex $ABCD$ notăm cu M mijlocul laturii BC şi cu N mijlocul laturii CD. Fie P intersecţia dreptelor AM şi DB, iar Q intersecţia dreptelor AN şi DB. Demonstraţi că $DQ = QP = PB$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

***

2. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului dreptunghic ABC $(m(\sphericalangle A) = 90^o)$ se consideră respectiv punctele K, L, M, N astfel încât $m(\sphericalangle KCB) = m(\sphericalangle LCK) = \frac{1}{3} m(\sphericalangle ACB)$ şi $m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle NBM) = \frac{1}{3} m(\sphericalangle ABC)$. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor BM şi CK, iar Q punctul de intersecţie a dreptelor BN şi CL. Demonstraţi că $QP = QL = QN$.

Olimpiada Ucraina 2010

3. a) Arătaţi că $\dfrac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2^n+1} - \dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

b) Determinaţi numărul natural nenul n astfel încât:

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 17} + ... + \frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{2^{2010}-1}{3(2^{2011}+1)}$$

(Gazeta Matematica)

4. Un număr natural $m > 1$ se numeşte perfect dacă suma tuturor divizorilor naturali ai săi este egală cu $2m$.

a) Arătaţi că dacă $2^n - 1$ este un număr prim, atunci numărul $2^{n-1}(2^n - 1)$ este perfect (de exemplu, numărul 28 este perfect).

b) Demonstraţi că dacă m este un număr perfect, iar $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = m$ sunt divizorii săi pozitivi, atunci $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + ... + \dfrac{1}{d_k} = 2$.

***

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*
Timp de lucru: 3 ore