Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

13 februarie 2010

Clasa a V-a

SOLUŢII

Problema 1. Se consideră numerele naturale a, b, c care verifică egalităţile: $a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2$ şi $a + b = 2010.$

a) Să se compare numerele b şi c ;

b) Să se calculeze $2 \cdot a + b + c$;

c) Să se calculeze $\left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \cdot \left(b^2 - c^2\right) \cdot \left(c^2 + a^2\right)$.

Gusta Constanţa, profesor, Galaţi

Soluţie :

a) Din $a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2$, obţinem:

$$\left.\begin{array}{l} c \cdot (a+b) = b \cdot (a+b) \\ a + b = 2010 \end{array}\right\} \Rightarrow c = b .$$

b) Din $b = c \Rightarrow 2 \cdot a + b + c = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a+b) = 4020.$

c) Din $b = c \Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \cdot \left(b^2 - c^2\right) \cdot \left(c^2 + a^2\right) = 0.$

Problema 2. Să se determine numerele naturale mai mici decât 5000, care au ultima cifră 7 şi sunt de forma $7^m + 6^n$, m, n sunt numere naturale.

Guiţă Visilina, profesor, Galaţi

Soluţie : $u\left(6^n\right) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 6, & n \geq 1 \end{cases}$ iar $u\left(7^m\right) \in \{1, 7, 9, 3\}$**.** Pentru a obţine ultima cifră 7, convine numai $u\left(6^n\right) = 6$, pentru $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$u\left(7^m\right) = 1 \Rightarrow m$ este multiplu de $4 \Rightarrow \mathrm{m} \in \{0; 4.\}$ Pentru $\mathrm{m} \geq 8 \Rightarrow 7^8 > 5000$**.**

I. Dacă $m = 0 \Rightarrow 7^0 = 1$;

Atunci, numerele 6^n care adunate cu 1 să dea un număr mai mic decât 5000 pot fi **:** 6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt : 7; 37;217; 1297.

II. Dacă $m = 4 \Rightarrow 7^4 = 2401$;

atunci, numerele 6^n care adunate cu 2401 să dea un număr mai mic decât 5000 sunt**:** 6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt: 2407; 2437; 2617; 3697. În concluzie, toate numerele căutate sunt: 7; 37;217; 1297, 2407; 2437; 2617; 3697.

Problema 3. Se consideră numerele naturale $m = 2009^2 + 2009$ şi

$n =$ suma tuturor numerelor de forma $\overline{200c}^{2010}$, unde c este o cifră din sistemul de numeraţie zecimal.

a) Să se demonstreze că numerele m şi n se divid cu 5;

b) Să se determine cel mai mare număr natural k astfel încât numărul m să se dividă cu 7^k;

c) Să se determine câtul şi restul împărţirii numărului m la numărul 2747.

Duma Vasile, profesor, Galaţi

Soluţie :a)

$m = 2009 \cdot 2010 \Rightarrow u(2009 \cdot 2010) = 0 \Rightarrow 5 / m;$

$u\left(\overline{200c}^{2010}\right) = u\left(c^2\right) \Rightarrow u(n) = u(0+1+4+9+6+5+6+9+4+1) = 5 \Rightarrow 5 / n.$

b) Din

$m = 2009 \cdot 2010,$ se verifică care din cei doi factori se divide cu 7. Acesta este 2009. Apoi se verifică dacă 2009 se divide cu 49(A), apoi cu 343(Fals).

Aşadar, k=2.

c)

$2747 = 41 \cdot 67 \Rightarrow m = 2009 \cdot 2010 = 7^2 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow m = 2747 \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2\right) \Rightarrow$

$m = 2747 \cdot 1470 \Rightarrow$ câtul este 1470 şi restul este zero.

Problema 4.

a) Să se determine ultimele două cifre ale produsului $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 11\cdot 12\cdot 13$.

b) Notăm $a=1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+...+1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2009\cdot 2010$. Să se demonstreze că numărul $a+2$ nu este pătrat perfect.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Soluţie. a) În produsul $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ există factorii 2, 5 şi 10, deci produsul $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ se divide cu 100. Deci, ultimele două cifre ale produsului $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 11\cdot 12\cdot 13$ sunt 00.

b) Dacă notăm $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, atunci $a=1!+2!+3!+...+2010!$, iar $1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120,\ 6!=720,\ 7!=5040,\ 8!=40320,\ 9!=362880$ şi 100 divide $n!$, pentru orice $n\geq 10$. Rezultă că numărul natural a are ultimele două cifre 13, iar $a+2$ are ultimele două cifre 15, de unde rezultă că $a+2$ nu este pătrat perfect (este cunoscut faptul că dacă un număr natural care are ultima cifră 5 şi este pătrat perfect, atunci penultima cifră este egală cu 2)

Observaţie. Rezultatul din paranteză este cunoscut de elevii din clasa a V-a şi el este o consecinţă a calculului următor

$$\overline{a_1a_2...a_n5}^2=\left(\overline{a_1a_2...a_n0}+5\right)^2=\left(10\cdot x+5\right)^2=\left(10\cdot x+5\right)\cdot\left(10\cdot x+5\right)=10\cdot x\cdot\left(10\cdot x+5\right)+$$

$$+5\cdot\left(10\cdot x+5\right)=100\cdot x^2+50\cdot x+50\cdot x+25=100\cdot x^2+100\cdot x+25,\text{ unde } x=\overline{a_1a_2...a_n}.$$