Problema 1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $n! + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. *Artur Bălăucă*

Soluţia 1. *(Artur Bălăucă)*

Pentru ecuaţia $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$ observăm că valorile $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ nu sunt soluţii. 2p

Pentru $n = 5$ ecuaţia se verifică: $5! + 3 \cdot 2^5 = 216 = 6^{5-2}$. 2p

Dacă $n \geq 6$ atunci $9/n!, 9/6^{n-2}$, de unde rezultă că $9/3 \cdot 2^n$, adică $3/2^n$, absurd. 3p

Rezultă că unica soluţie este $n = 5$.

Soluţia 2. *(Mircea Fianu)*

Cazurile $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se tratează analog soluţiei 1. Considerând valorile $n \in \{6, 7, 8\}$, 5 nu divide numărul $6^{n-2} - 3 \cdot 2^n$.

Dacă $n \geq 9$ avem:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4 \cdot n > 6^2$$
$$5 \cdot (n-1) > 6^2$$
$$6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n-2) > 6^{n-7}$$

Prin înmulţire, rezultă că $n! > 6^{n-2}$ şi iar nu avem soluţie.

Problema 2. Fie triunghiul ABC şi punctul D situat pe latura $[BC]$. Arătaţi că:

$$AB \cdot DC + AC \cdot BD \geq AD \cdot BC.$$

***

Soluţia 1. *(Mircea Fianu)*

Construim $DE \parallel AB$ şi $DF \parallel AC$, unde $E \in [AC], F \in [AB]$.

Conform Teoremei fundamentale a asemănării aplicată triunghiului ΔABC şi paralelei DE avem: $\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB}$ de unde $AB \cdot CD = CB \cdot DE$. 2p

Conform Teoremei fundamentale a asemănării aplicată triunghiului ΔABC şi paralelei DF avem: $\frac{BD}{CB} = \frac{DF}{AC}$ de unde $BD \cdot AC = BC \cdot DF$.......... 2p

Patrulaterul $AEDF$ fiind paralelogram avem că $DE = AF$ şi, folosind inegalitatea triunghiului în ΔADF, are loc relaţia: $DE + DF = AF + DF > AD$. 1p

Prin însumarea celor două relaţii obţinem: $AB \cdot CD + BD \cdot AC = BC \cdot (DE + DF) \cdot AD$. 1p

Egalitatea are loc dacă $D \in \{B, C\}$. 1p

Soluţia 2. *(Artur Bălăucă)*

Cazul $D = B$ sau $D = C$ conduce la $AB + AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Cazul $D \in (BC)$. Construim $CM \parallel AB, M \in AD$. Atunci, conform teoremei fundamentale a asemănării, triunghiurile ΔABD şi ΔMCD sunt asemenea, de unde $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{MC}$ şi atunci $\frac{BD}{BD+CD} = \frac{AD}{AD+MD}$, ceea ce implică $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AM}$. (1) În triunghiul ΔAMC avem $AC + CM > AM$. (2) Relaţiile (1) şi (2) conduc la $AC + \frac{CD \cdot AB}{BD} > \frac{BC \cdot AD}{BD}$, de unde $AC \cdot BD + CD \cdot AB > BC \cdot AD$.

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu:

$$2a^2 + ab + 2b^2 + 4ab + 3a + 3b + 4 = 0,$$

de unde

$$a(a + 2b) + 2b(2a + b) + 3a + 3b + 4 = 0$$

iar

$$(a + 2b)(2a + b) + (a + 2b) + (2a + b) + 1 = -3,$$

ceea ce implică $(a + 2b + 1)(2a + b + 1) = -3$. 4p

Aşadar

$$(a + 2b + 1, 2a + b + 1) \in (1; -3), (-1; 3), (3; -1), (-3, 1),$$

ceea ce conduce la $(a, b) \in (-2; 2), (2; -2)$. 3p

Problema 3. Fie $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Să se arate că $a + b \geq 1 \geq c + d$. *Gheorghe Iurea*

Soluţie. Cum $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ avem că $ab \geq c^2, ab \geq d^2, cd \leq a^2$, $cd \leq b^2$. 2p

Atunci $(a+b)^2 = a^2+ab+ab+b^2 \geq a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ implică $a+b \geq 1$ 2p

iar $(c + d)^2 = c^2 + cd + cd + d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ implică $c + d \leq 1$. 2p

Deci $c + d \leq 1 \leq a + b$. 1p

Problema 4. Numim *piramidă Myller* o piramidă $SABCD$ cu baza $ABCD$ care are $SA = SB = SC = SD$, $\angle ASB \equiv \angle ASD$ şi $\angle BSC \equiv \angle DSC$ iar lungimile $SA, AB, BC, CD, DA, AC, BD$ sunt numere naturale nenule. Aflaţi piramida Myller de volum minim.

Cristian Lazăr

Soluţie. Deoarece $SA = SB = SC = SD, \Delta SAB \equiv \Delta SAD$ şi $\Delta SBC \equiv \Delta SCD$ obţinem că $ABCD$ este un deltoid inscriptibil. 3p

Triunghiul dreptunghic de dimensiuni minime în care laturile şi înălţimea sunt exprimate prin numere naturale este cel cu laturile 15,20,25. .... 2p

Lungimea minimă a muchiei laterale este 13. .... 1p

Volumul minim este $50\sqrt{51}$. 1p

Problema 3. Fie p un număr natural impar. Se ştie că oricare divizor al lui p are ultima cifră diferită de 3 şi 7. Să se arate că numărul $5p+1$ nu este pătrat perfect. *Mircea Fianu*

Soluţie. Dacă $5p+1$ este pătrat perfect, atunci $5p+1=(5k\pm 1)^2$. 2p
de unde

$$5p+1=25k^2\pm 10k+1$$

şi rezultă că $p=k(5k\pm 2)$. 2p

Cum k este divizor al numărului impar p, atunci k este impar iar ultima cifră a numărului $5k$ va fi 5. ....2p

Atunci $\mathrm{U}(5k\pm 2)\in\{3,7\}$, contradicţie. 1p

Problema 4. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctul D situat pe latura (AC). Bisectoarea unghiului $\angle ABD$ intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul E. Arătaţi că $AE+DC=BD$.

Cristian Lazăr

Soluţie. *(Mircea Fianu)* Considerăm punctul E' pe semidreapta opusă lui $(AE$ astfel încât $AE'=CD$. AB este secantă pentru dreptele paralele BC şi AE de unde rezultă că $m(\angle E'AB)=m(\angle ABC)=60^o$. 2p

Deoarece $AB=BC, CD=AE'$ şi $m(\angle DCB)=m(\angle E'AB)=60^o$ avem congruenţa $\Delta E'AB\equiv\Delta DCB$ (L.U.L.), ... 2p

care implică $E'B=DB$ şi $\angle E'BA\equiv\angle DBC$. Cum $(BE$ este bisectoarea unghiului $\angle ABD$, atunci $\angle ABE\equiv\angle EBD$ de unde $\angle E'BE\equiv\angle EBC$. Dreptele AE şi BC fiind paralele, BE secantă, rezultă că $\angle EBC\equiv\angle E'EB$. Obţinem că triunghiul $\Delta E'EB$ este isoscel cu baza BE. 2p

Deci $EA+AE'=E'B=BD$. 1p

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie un tetraedru regulat cu muchia de lungime 3. Pe suprafaţa acestuia se consideră 37 de puncte. Arătaţi că printre aceste puncte există două astfel încât distanţa dintre ele este cel mult egală cu 1. ***

Soluţie. Conform principiului cutiei, cum tetraedrul are patru feţe, pe una din feţe vor fi cel puţin 10 puncte. 3p

Faţa fiind triunghi echilateral de latură 3 o împărţim în 9 triunghiuri echilaterale de latura 1. ....1p

Din nou, conform principiului cutiei, vor exista cel puţin 2 puncte situate în interiorul unui triunghi echilateral de latură 1. Acestea vor fi situate la distanţa cel mult egală cu latura triunghiului echilateral, adică 1. ....3p

Problema 2. Determinaţi perechile de numere $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ care verifică egalitatea

$$2(a+b)^2+3(a+b)+ab+4=0.$$

Petru Răducanu