

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a IV-a

1: a) Aflați necunoscuta:

$$1 + \{2 \cdot [3 + (x - 4) \cdot 5] : 6\} \cdot 7 = 8$$

b) Aflați numerele naturale x, y, z știind că $x \cdot z + 7 \cdot y \cdot z + z = 49$ și

$$x + 7 \cdot y = 6$$

2:a) Suma a trei numere naturale este 878. Dacă împărțim primul număr la al doilea obținem câtul 1 și restul egal cu al treilea număr care este cu 125 mai mic decât al doilea. Aflați cele trei numere.

b) Aflați câte cifre de 4 sunt în scrierea numărului:

$$\overline{1234\dots 498499500}$$

3:a) Șase copii udă 6 pomi în 6 minute.

Câți copii vor uda 48 de pomi în 12 minute?

b) Aflați numărul \overline{abc} știind că $\overline{aabb} + \overline{cc} = 1155$

4: Să se afle vârstele celor 2 frați Lolek și Bolek, știind că în urmă cu 1 an vârsta lui Bolek era de 3 ori mai mare decât diferența vârstelor lor, iar peste 2 ani, suma vârstelor lor va fi de 3 ori mai mare decât vârsta actuală a lui Lolek.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a V-a

1: (9p) Doi copii, Ionel și Mihai, sunt colecționari de timbre. Dacă Ionel îi dă lui Mihai 13 timbre, atunci Mihai va avea de patru ori mai multe timbre decât Ionel. Dacă Mihai îi dă lui Ionel 7 timbre, atunci Mihai va avea de două ori mai multe timbre decât Ionel.

Câte timbre are fiecare copil?

Niculaie Marin Goșoniu

2: (4p) **a)** Determinați mulțimea $A = \{\overline{bc} \mid \text{există } a \in N \text{ astfel încât } a^{b^c} = 16\}$

(5p) **b)** Să se arate că mulțimea A se poate scrie ca reuniune disjunctă de trei submulțimi care au aceeași sumă a elementelor.

Traian Preda

3: (5p) **a)** Să se afle câte numere naturale se pot scrie sub forma:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

(4p) **b)** Să se afle câte numere dintre cele de la punctul **a)** nu se pot scrie sub forma

$$\overline{mnn} + \overline{nmm}$$

Traian Preda

4: Se dă mulțimea $M = \{4, 11, 18, 25, \dots, 186, 193, 200\}$

(4p) **a)** Să se afle cardinalul mulțimii M .

(5p) **b)** Dacă A este o submulțime a lui M , iar $\text{card}(A) = 16$, să se arate că în A există două numere a căror sumă este 211.

Niculaie Marin Goșoniu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).
Timp de lucru efectiv: 2 ore și 30 de minute.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a VI-a

1: (4p)a) Scrieți elementele mulțimii $A = \left\{ \overline{ab} \in N \mid \frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{ba}}{7} \right\}$

(5p)b) Arătați că numerele $a = 2^n \cdot 5^{n+1} + 7$ și $b = 2^{n+1} \cdot 5^n + 3, n \in N$ sunt prime între ele.

Dorela Făiniș

2: Fie $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$ unghiuri formate în jurul punctului O, astfel încât

$$\frac{1}{7}m(\angle AOB) = \frac{1}{4}m(\angle BOC) = \frac{1}{3}m(\angle COD) = m(\angle DOA)$$

(4p) a) Să se afle măsurile celor patru unghiuri.

(5p) b) Să se arate că semidreapta opusă semidreptei (OC este bisectoarea unghiului $\angle AOB$).

3: Să se arate că nu exista numere naturale x și y astfel încât $x^2 - 2y^2 = 3$

Niculaie Marin Goșoniu

4: Se consideră mulțimea $A_n = \{X \mid X \text{ are } n \text{ cifre și suma cifrelor lui } X \text{ este egală cu produsul cifrelor lui } X\}$

(4p) a) Să se afle mulțimea A_3

(5p) b) Să se arate că pentru orice n cu, $3 \leq n \leq 10, A_n \neq \emptyset$

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).

Timp de lucru efectiv: 2 ore și 30 de minute.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a VII-a

1: (4p)a) Dacă $\frac{x+y}{x} = \sqrt{3} + 1$, calculați: $\frac{y\sqrt{3}-x}{y+x\sqrt{3}}$

(5p)b) Fie $x, y \in \mathbb{Q}$. Arătați că:

$$\frac{x+y}{\sqrt{3}} + \frac{x-y}{\sqrt{12}} \in \mathbb{Q} \text{ dacă și numai dacă: } \frac{x+2y}{\sqrt{2}} - \frac{3y-x}{\sqrt{8}} \in \mathbb{Q}.$$

Cristian Olteanu, Traian Preda

2: Se consideră mulțimea $A = \{1, 3, 6, 8, 11, 13, \dots, 2001, 2003, 2006, 2008\}$.

(3p) a) Indicați o proprietate caracteristică a elementelor mulțimii A și aflați $\text{card } A$.

(3p) b) Demonstrați că dacă M este o submulțime a lui A , cu $\text{card } M = 403$, atunci M conține cel puțin două elemente a căror sumă este 2009.

(3p) c) Să se calculeze $\text{card } E$, unde $E = \{x \mid x \in A, x:7 \text{ și } x:3\}$

Niculaie Marin Goșoniu

3: (9p) Lungimile a șapte segmente sunt $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ și

$$10 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq x_7 \leq 100. \text{ Arătați că printre aceste șapte segmente se găsesc trei cu care se poate construi un triunghi.}$$

Liviu Opreșcu

4: (9p) Fie triunghiul ABC și I centrul cercului său înscris. Notăm cu M și N mijloacele laturilor AB și respectiv AC , iar P și Q intersecțiile dreptei MN cu dreptele BI și

respectiv CI . Știind că $PQ = \frac{AI}{2}$, să se demonstreze că $m(\angle PAQ) = 30^\circ$.

Marius Damian, Brăila

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).

Timp de lucru efectiv: 3 ore.

Concursul de matematică Arhimede
Editia a V-a. Etapa a II-a din 23 februarie 2008

Clasa a VIII-a

1: Se consideră expresia $E(a,b,c) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $a,b,c \in \mathfrak{R}^*$.

(3p) **a)** Calculați $E\left(2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}; -\frac{1}{4}\right)$

(3p) **b)** Dacă $E(a;b;c) = 1$, calculați $(a+b)(a+c)(b+c)$

(3p) **c)** Rezolvați în \mathfrak{R} ecuația:

$$(3x - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})\left(\frac{1}{x - \sqrt{2}} + \frac{1}{x - \sqrt{3}} + \frac{1}{x - \sqrt{5}}\right) = 1$$

Dan Nedeianu

2: (3p) **a)** Demonstrați inegalitatea:

$$\overline{ab^3} + \overline{ba^3} \leq \overline{aa^3} + \overline{bb^3}$$

Traian Preda

(3p) **b)** Să se arate că : $\frac{4a^2 + 2a + 1}{a} - \frac{12a}{4a^2 + 2a + 1} \geq 4, \forall a > 0$

D.M. Bătinețu Giurgiu

(3p) **c)** Să se arate că pentru orice numere reale strict pozitive a,b,c este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Nicolae Papacu

3: Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub cu $A' M = AN$ unde $M \in [A' D]$ și $N \in [AC]$. Se cere:

(4p) **a)** Să se arate că $MN \parallel (ABB')$

(5p) **b)** Să se arate că $MN \geq \frac{l\sqrt{2}}{2}$, unde l este muchia cubului $ABCD A' B' C' D'$.

Liviu Opreșcu

4: (9p) Fie $ABCD$ un tetraedru cu toate fețele triunghiuri ascuțitunghice. Să se arate că există un vârf al tetraedrului cu ale cărui muchii se poate forma un triunghi ascuțitunghic.

Revista Arhimede

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu un punctaj cuprins între 1 și 10 puncte (la fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu).

Timp de lucru efectiv: 3 ore.