

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ȘI SPORTULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI IAȘI
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – Filiala IAȘI



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa JUDEȚEANĂ ,BARAJ
Iași, 5 mai 2010

CLASA A VI-A- BAREM DE NOTARE

1. O mulțime M de numere naturale are proprietatea (P): „ **dacă pentru orice $x \in M$ avem:**

$$(x - 4) \in M \text{ sau } \frac{x}{4} \in M \text{ ”.}$$

Arătați că:

- a) există mulțimi cu cinci elemente care au proprietatea (P) (să se dea un exemplu);
- b) dacă M are proprietatea (P), atunci $9 \notin M$;
- c) dacă M are proprietatea (P) și $16 \in M$, atunci $0 \in M$.

Soluție:

a) un exemplu (verificarea condițiilor !): $M = \{0, 4, 8, 16, 32\}$ 2p

b) presupunem că există o mulțime M care are proprietatea (P) și pentru care $9 \in M$; deducem că $5 \in M$ sau $\frac{9}{4} \in M$. Cum M conține numai numere naturale, deducem că $5 \in M$ 1p

$5 \in M$, de unde $1 \in M \Rightarrow -3 \in M$ sau $\frac{1}{4} \in M$, contradicție. Deci $9 \notin M$ 1p

c) $16 \in M \Rightarrow 12 \in M$ sau $4 \in M$ 1p

• Dacă $12 \in M$, atunci $8 \in M$ sau $3 \in M$; folosind proprietatea (P), de aici se deduce însă că putem avea doar $8 \in M$, apoi: $4 \in M$ sau $2 \in M$. La fel, avem că $2 \notin M$, deci $4 \in M$; rezultă: $0 \in M$ sau $1 \in M$, dar dacă $1 \in M$, atunci $-3 \in M$ sau $\frac{1}{4} \in M$, absurd, deci $0 \in M$ 1p

• Dacă $4 \in M$, am văzut deja că se ajunge la $0 \in M$1p.

2. Determinați cele mai mici numere naturale consecutive $a < b < c < d$ știind că: $8|a$, $7|b$, $6|c$, $5|d$.

Soluție:

Avem $a = 8m$, $m \in \mathbb{N}^*$ 1p.

Din $7|b$, $b = a + 1$, $\Rightarrow 7|8m + 1 \Rightarrow 7|m + 1$ 1p

Din $6|c$, $c = a + 2$, $\Rightarrow 6|8m + 2 \Rightarrow 3|4m + 1 \Rightarrow 3|m + 1$ 1p

Din $5|d$, $d = a + 3$, $\Rightarrow 5|8m + 3 \Rightarrow 5|3(m + 1) \Rightarrow 5|m + 1$ 1p

Din cele 3 relații $\Rightarrow m + 1$ este un multiplu al numerelor 3, 5, 7.1p

Atunci $m + 1 = 105k$, $k \in \mathbb{N}^*$ 1p

Deoarece a este cel mai mic posibil, alegem $k = 1$, de unde obținem $a = 832$, $b = 833$, $c = 834$, $d = 835$ 1p

3. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\hat{B}) = 45^\circ$, $AD \perp BC$ și $CE \perp AB$; $D \in BC, E \in AB$.

Dacă F este mijlocul laturii $[AC]$, arătați că:

- a) $FE = FD$;
- b) $FE \perp FD$.

Soluție :

a) DF este mediană în $\triangle ADC$ dreptunghic $\Rightarrow DF = \frac{1}{2}AC$ (1).....1p

EF este mediană în $\triangle AEC$ dreptunghic $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}AC$ (2).....1p

Concluzia : $FE = FD$1p

b) Din (1) $\Rightarrow \triangle FDC$ este isoscel: $\sphericalangle FDC \equiv \sphericalangle FCD$ (3).

Analog, din (2) $\Rightarrow \triangle FAE$ este isoscel: $\sphericalangle FEA \equiv \sphericalangle FAE$ (4)1p

$\sphericalangle EFC$ este exterior $\triangle EFA$, coform cu (4) $\Rightarrow m(\sphericalangle EFC) = 2m(\hat{A})$ (5).....1p

Din (3) $\Rightarrow m(\sphericalangle DFC) = 180^\circ - 2m(\hat{C})$ (6)1p

$m(\sphericalangle EFD) = m(\sphericalangle EFC) - m(\sphericalangle DFC) = 2(m(\hat{A}) + m(\hat{C})) - 180^\circ = 90^\circ$.

Deci $FE \perp FD$1p.

Observație : Concluzia rămâne adevărată și în cazurile când A sau C sunt unghiuri obtuze.

4. Se consideră un triunghi ABC în care $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 9$ și se notează cu M și N picioarele perpendicularelor duse din punctul A pe bisectoarele interioare ale unghiurilor \hat{B} , respectiv \hat{C} .

Calculați lungimea segmentului $[MN]$.

Soluție :

Notăm $AM \cap BC = \{P\}$ și $AN \cap BC = \{Q\}$.

• Triunghiul ABP este isoscel, deoarece BM este bisectoare și înălțime, deci $AB = BP = 6$. Deducem $PC = 3$ (1)2p

• Analog se obține că triunghiul ACQ este isoscel, deci $AC = CQ = 7 \Rightarrow QB = 2$ (2)1p

• Din (1) și (2) ajungem la $PQ = 4$ 2p

• Se deduce imediat că MN este linie mijlocie în triunghiul APQ și astfel : $MN = 2$2p