

## CLASA a VII a

1.

b) Fie  $a = (2n)^{2^{2010}} + 1$

1) Pentru  $n = 0 \Rightarrow a = 1$

2) Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a = (2n)^{2^{2010}} + 1$  este impar .

Dacă  $a = x + y$ , cu  $x, y$  numere prime atunci  $x$  este par și  $y$  impar  $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = a - 2 \Rightarrow y = [(2n)^{2^{2009}} - 1][(2n)^{2^{2009}} + 1]$  care nu este prim.

2.

Fie  $F$  punctul de intersecție dintre  $AE$  și  $DC$ . Din faptul că  $[AF]$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle(DAB)$  rezultă că  $\sphericalangle(DAF) = \sphericalangle(BAF)$ . În plus,  $AB \parallel DC$ ; de unde  $\sphericalangle(DFA) = \sphericalangle(BAF)$ . Prin urmare,  $\sphericalangle(DAF) = \sphericalangle(DFA)$  deci triunghiul  $DAF$  este isoscel cu  $DA = DF$ . Ținând cont că, din ipoteză, avem  $DC = DA + AB$ ; deducem că  $AB = CF$ . Așadar,  $ABCF$  este paralelogram, de unde rezultă că  $AE \parallel BC$ .

b) Din  $AE \parallel BC$  rezultă că  $aria[BEC] = aria[BAC]$ , iar din  $AB \parallel CD$  rezultă că

$aria[BAD] = aria[BAC]$ . Atunci  $aria[BEC] = aria[BAD]$ , ceea ce spune că triunghiurile  $BEC$  și  $BAD$  sunt echivalente.

3.

Deoarece

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \Rightarrow 2^2 \cdot 7^{2010} + 3^2 \cdot 7^{2010} + 6^2 \cdot 7^{2010} = 7^{2012} \Leftrightarrow (2 \cdot 7^{1005})^2 + (3 \cdot 7^{1005})^2 + (6 \cdot 7^{1005})^2 = 7^{2012}$$

deci  $B$  conține tripletul  $(2 \cdot 7^{1005}, 3 \cdot 7^{1005}, 6 \cdot 7^{1005})$  și încă 5 obținute prin permutări. În plus

$(0, 0, 7^{1006}), (0, 7^{1006}, 0), (7^{1006}, 0, 0) \in B$ . Așadar  $CardB \geq 9$ .

$7^{2011} = 7 \cdot 7^{2010} = 7 \cdot 49^{1005} = 7 \cdot (8k_1 + 1)^{1005} = 7 \cdot (8k_2 + 1) = 8k_3 + 7$ . Dacă  $a^2 + b^2 + c^2 = 7^{2011} \Rightarrow a, b, c$  impare toate trei sau unul este impar și celelalte pare.

I. Dacă  $a$  impar,  $b, c$  pare  $\Rightarrow a^2 \in M_4 + 1, b^2, c^2 \in M_4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \in M_4 + 1$ .

Dar  $8k_3 + 7 \in M_4 + 3$ .

II. Dacă  $a, b, c$  impare  $\Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 \in M_8 + 1$  și analog pentru  $b^2$  și  $c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \in M_8 + 3$ . Dar  $8k_3 + 7 \in M_8 + 7$ .

Deci nu există  $a, b, c \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = 7^{2011} \Rightarrow CardA = 0$  și  $CardB \geq 9 + CardA$ .

4.

Din  $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$  obținem  $5x(x^2 - y^2) + 2y(x^2 - y^2) = 0$  sau  $(x^2 - y^2)(5x + 2y) = 0$ ,

de unde  $x = y; x = -y$  sau  $x = -\frac{2y}{5}$ . Înlocuind în fracția dată obținem  $\frac{3x + 4y}{4x + 3y} \in \{1, -1, 2\}$ , deci

număr întreg.

### 3.

Deoarece

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \Rightarrow 2^2 \cdot 7^{2010} + 3^2 \cdot 7^{2010} + 6^2 \cdot 7^{2010} = 7^{2012} \Leftrightarrow (2 \cdot 7^{1005})^2 + (3 \cdot 7^{1005})^2 + (6 \cdot 7^{1005})^2 = 7^{2012}$$

deci  $B$  conține tripletul  $(2 \cdot 7^{1005}, 3 \cdot 7^{1005}, 6 \cdot 7^{1005})$  și încă 5 obținute prin permutări. În plus

$(0, 0, 7^{1006}), (0, 7^{1006}, 0), (7^{1006}, 0, 0) \in B$ . Așadar  $\text{Card}B \geq 9$ .

$$7^{2011} = 7 \cdot 7^{2010} = 7 \cdot 49^{1005} = 7 \cdot (8k_1 + 1)^{1005} = 7 \cdot (8k_2 + 1) = 8k_3 + 7. \text{ Dacă } a^2 + b^2 + c^2 = 7^{2011} \Rightarrow$$

$a, b, c$  impare toate trei sau unul este impar și celelalte pare.

I. Dacă  $a$  impar,  $b, c$  pare  $\Rightarrow a^2 \in M_4 + 1, b^2, c^2 \in M_4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \in M_4 + 1$ .

Dar  $8k_3 + 7 \in M_4 + 3$ .

II. Dacă  $a, b, c$  impare  $\Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1 \in M_8 + 1$  și analog pentru  $b^2$

și  $c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \in M_8 + 3$ . Dar  $8k_3 + 7 \in M_8 + 7$ .

Deci nu există  $a, b, c \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 = 7^{2011} \Rightarrow \text{Card}A = 0$  și  $\text{Card}B \geq 9 + \text{Card}A$ .

### 4.

Din  $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$  obținem  $5x(x^2 - y^2) + 2y(x^2 - y^2) = 0$  sau  $(x^2 - y^2)(5x + 2y) = 0$ ,

de unde  $x = y; x = -y$  sau  $x = -\frac{2y}{5}$ . Înlocuind în fracția dată obținem  $\frac{3x + 4y}{4x + 3y} \in \{1, -1, 2\}$ , deci

număr întreg.