OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 12.02.2011, BOTOŞANI
Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

1. $a=\left[3^{666}-\left|2^{999}-3^{666}\right|\right]:\left[(-8)^{3}\right]^{111}=\left[3^{666}-\left|2^{999}-3^{666}\right|\right]:\left[(-8)^{3}\right]^{111}=$

$=\left[3^{666}-\left(3^{666}-2^{999}\right)\right]:\left[(-2^{3})^{3}\right]^{111}=2^{999}:(-2^{999})=-1$ ………………..………….…………………1p

$b=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(3-\sqrt{2}\right)-1=1$ şi finalizare ……………………….……………….……………1p

2. $\sqrt{\dfrac{5x+2}{x-3}}$ este număr natural dacă şi numai dacă $\dfrac{5+2x}{x-3}$ este număr natural pătrat perfect………..1p

$\dfrac{5x+2}{x-3}\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{Z}$ implică $x-3/5x+2$ de unde se obţine $x-3\in D_{17}$ şi rezultă $x\in\{-14;2;4;20\}$ ……………………………………………..…………………..……….. 2p

Argumentează că singura soluţie este – 14…………………………………………………….…..2p

SUBIECTUL II

Din condiţia b) se deduce că mulţimile A şi B sunt disjuncte. …………………………………...1p

Din c) şi a) deducem că numărul elementelor mulţimii $A\cup B$ este impar şi, conform condiţiei b) avem:

$A=\{n,n+1,n+2,n+3,\ldots,n+k\}$ şi $B=\{n+k+1,n+k+2,+n+k+3,\ldots,n+2k\}$, unde $n,k\in\mathbb{N}^{*}$..……..2p

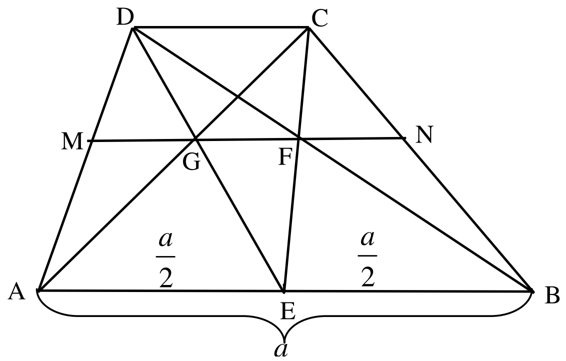
Condiţia d) conduce la: $n(k+1)+\dfrac{k(k+1)}{2}=nk+k^{2}+\dfrac{k(k+1)}{2}$, de unde se deduce că $n=k^{2}$ ……....2p

Deci mulţimile A şi B sunt de forma:

$A=\{k^{2},k^{2}+1,k^{2}+2,\ldots,k^{2}+k\}$şi B=$\{k^{2}+k+1,k^{2}+k+2,k^{2}+k+3,\ldots,k^{2}+2k\}$,unde $k\in\mathbb{N}^{*}$

Prin urmare, există o infinitate de mulţimi A şi B care satisfac condiţiile date…………………..…2p

SUBIECTUL III



a) Din asemănarea triunghiurilor *AGE* şi *CGD* (*t.f.a.)* şi asemănarea triunghiurilor *BFE* şi *DFC* (*t.f.a.*) se deduce, folosind ipoteza *AE=BE*, că $\dfrac{GE}{GD}=\dfrac{EF}{CF}$, ..………………………...…………2p de unde, cu reciproca teoremei lui Thales în triunghiul CDE, rezultă paralelismul dreptelor GF şi CD cum AB şi CD sunt paralele, se obţine $FG \parallel AB$ 1p

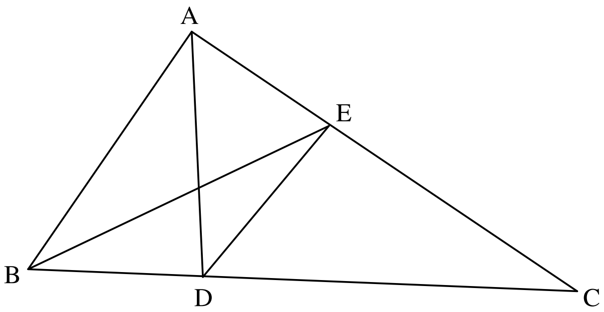
b)Demonstrează că $MG = GF = FN$; rezultă $MN = 3FG$ 1p

Din $GF \parallel CD$ rezultă $\triangle GEF \sim \triangle DEC$ ceea ce implică (1) $\dfrac{GF}{b} = \dfrac{EG}{DE}$ 1p

Din $\triangle GEA \sim \triangle GDC$ (*t.f.a.*) se obţine $\dfrac{EG}{DE} = \dfrac{AE}{CD} = \dfrac{a}{2b}$, de unde rezultă (2) $\dfrac{EG}{DE} = \dfrac{a}{a+2b}$ 1p

Din (1) şi (2) se deduce că $GF = \dfrac{ab}{a+2b}$, deci $MN = \dfrac{3ab}{a+2b}$ 1p

SUBIECTUL IV



a) Cu teorema bisectoarei se obţine $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC}$ şi cum AD=CE, rezultă

$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{BC}$ 2p

Din $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{BC}$ şi $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ABC$, rezultă $\triangle ADE \sim \triangle BCA(l.u.l)$, ceea ce implică $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BAC$. .1p

$DE \parallel AB$ implică $m(\sphericalangle AED) + m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ$ şi rezultă $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$. 1p

b) Din $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$ şi $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ABC$ se deduce că $AD \perp BC$ 2p

Triunghiurile ADB şi CED sunt congruente(C.U.), deci $[CD] \equiv [AB]$ 1p