

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE
Clasa a VI-a

1.a) $2^a \cdot 2^b = 2^{2011}$ sau $2^{a+b} = 2^{2011}$ sau $a + b = 2011$

Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a si b , $d = (a,b)$;

atunci $a = dx$ si $b = dy$ cu $(x,y) = 1$;

relatia $a + b = 2011$ devine $dx+dy = 2011$ adica $d(x+y) = 2011$ din care rezulta ca d divide 2011

si cum 2011 e prim deducem ca $d = 2011$ sau $d = 1$.

Daca $d = 2011$ atunci $x+y = 1$ de unde $x = 0$ sau $y = 0$ de unde rezulta ca $a = 0$

sau $b = 0$ ceea ce contrazice $a, b \in \mathbb{N}^*$ deci $d = 1$ adica a si b sunt prime intre ele.

(3p)

b) Presupunem ca a_1, a_2, \dots, a_n sunt toate distincte.

Fara a restrange generalitatea problemei , fie $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

Relatia $2^{2011} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_n}$ devine

$2^{2011} = 2^{a_1} (1 + 2^{a_2-a_1} + \dots + 2^{a_n-a_1})$ echivalenta cu

$2^{2011-a_1} = 1 + 2^{a_2-a_1} + \dots + 2^{a_n-a_1}$;

2^{2011-a_1} este un numar par iar $1 + 2^{a_2-a_1} + \dots + 2^{a_n-a_1}$ este impar .

Egalitatea de mai sus este intre un numar par si unul impar ceea ce este imposibil deci a_1, a_2, \dots, a_n nu pot fi toate distincte. (4p)

2. Notăm cu x cel mai mare divizor comun pentru oricare două dintre cele trei numere .
Avem $a = x \cdot m$; $b = x \cdot n$; $c = x \cdot p$ cu $(m,n) = 1$; $(n, p) = 1$; $(m, p) = 1$, unde (m, n) este c.m.m.d.c. dintre m si n etc. (2p)

Rezultă: $[a,b] = x \cdot m \cdot n$; $[b,c] = x \cdot n \cdot p$; $[a,c] = x \cdot m \cdot p$. (2p)

Din: $[a,b]^2 = [b,c] \cdot [a,c]$ avem :

$$x^2 \cdot m^2 \cdot n^2 = x^2 \cdot m \cdot n \cdot p^2 \Rightarrow x^2 \cdot m \cdot n = x^2 \cdot p^2 \Rightarrow x \cdot m \cdot x \cdot n = (x \cdot p)^2 \Rightarrow a \cdot b = (x \cdot p)^2 .$$

Deci $a \cdot b$ pătrat perfect . (3p)

3.

a) Presupunem că unghiurile au măsuri diferite și făcând suma măsurilor lor se obține:

$$1+2+3+\dots+17+18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19 = 171^\circ > 170^\circ \Rightarrow \text{cel puțin două unghiuri sunt congruente. (4p)}$$

b) Notăm măsura celor 5 unghiuri congruente cu $x \in \mathbb{N}^*$ și se obține:

$$1+2+\dots+12+13+5x = 170^\circ \Rightarrow \frac{13 \cdot 14}{2} + 5x = 170^\circ \Rightarrow 13 \cdot 7 + 5x = 170^\circ \Rightarrow 5x = 170^\circ - 91^\circ \Rightarrow$$

$$5x = 79^\circ \Rightarrow x = 79^\circ : 5 \Rightarrow x = 15 \frac{4}{5} \Rightarrow x_{\max} = 15^\circ .$$

(3p)