

Clasa a VII-a

1. Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ astfel încât $xyz = 1$.

a) Arătați că $xy + yz + zx + x + y + z \geq 6$.

b) i) Calculați $(x+1)(y+1)$

ii) Arătați că $\sqrt{\left(\frac{1}{x} + y + z + 1\right)\left(x + \frac{1}{y} + z + 1\right)\left(x + y + \frac{1}{z} + 1\right)} \in \mathbb{Q}$.

c) Aflați x, y, z știind că $\frac{\frac{1}{x} + y}{z} = \frac{\frac{1}{y} + z}{x} = \frac{\frac{1}{z} + x}{y}$.

Prof. Dorina Zaharia

2.a) Sa se arate ca $\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2}$, unde a este un numar rational pozitiv.

b) Se considera produsul $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010}$. Sa se arate ca $P < \frac{1}{\sqrt{2011}}$.

Prof. Florin Carstea.

3. Fie triunghiul ABC obtuzunghic isoscel cu $[AB] \equiv [AC]$. Perpendicularele în A pe [AB] și [AC] întâlnesc înălțimile din B și C, respectiv în D și E, iar pe BC în N și respectiv în M. Fie H punctul de intersecție al celor două înălțimi. Demonstrați că:

a) $AH \perp BC$;

b) ADHE este romb;

c) BDEM este paralelogram.

Prof. Dorina Bocu

d) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC astfel ca BHEM să fie trapez isoscel.

4. Fie ABCD un romb de centru O, în care M este mijlocul laturii BC și N mijlocul laturii AD. BN și AM intersecționează DC în E, respective F. Notăm intersecția dreptelor AE și BF cu P și intersecția dreptelor PO și DC cu Q. Demonstrați ca:

Prof. Dorina Zaharia

a) $PQ = \frac{3}{2} AB$ b) Patrulaterul ACFP și BDEP au arii egale c) $A_{ABCD} = \frac{4}{9} A_{PEF}$.

Clasa a VIII-a

1.a) Arătați că $\sqrt{4k^2 + k} \notin \mathbb{Q}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $\sqrt{k(k+1)(k+2)(k+3)+1} \in \mathbb{N}$, $(\forall) k \in \mathbb{N}$.

Prof. Dorina Bocu

2. Demonstrați că :

a) $a + b > 2\sqrt{a \cdot b}$, cu $a \neq b, a, b > 0$

b) $\sqrt{\frac{1}{2011}} + \sqrt{\frac{2}{2010}} + \sqrt{\frac{3}{2009}} + \dots + \sqrt{\frac{2011}{1}} > 2011$

Prof. Emanuel Munteanu

3. Fie numerele reale pozitive a, b, c, d, m, n, p , care satisfac, pe rând, Prof. Dr. Ioana Masca
relațiile: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100$, $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d + c \cdot d = 150$, respectiv

$m^2 + n^2 + p^2 = 75$, $m \cdot n + m \cdot p + n \cdot p = 75$. Arătați că $A = \sqrt{\frac{a^m \cdot b^n \cdot c^p}{d^{m+n+p}}}$ este un număr natural.

4. Prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C' are muchia bazei ABC congruentă cu muchia laterală, $AB = AA' = 2a$, ($a > 0$).

a) Calculați sinusul măsurii unghiului format de BC' cu A'C.

b) Determinați poziția unui punct T pe muchia laterală (BB') astfel încât perimetrul triunghiului A'TC să fie minim.

c) Calculați distanța de la punctul T determinat anterior la planul (ACC').

d) Arătați că $(BAC') \perp (TA'C)$, unde T este punctul determinat la punctul b). Prof. Dorina Bocu