SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Soluţie. Considerăm mulţimile: $A = \{6, 12, \ldots, 2010\}$, $B = \{3, 9, 15, \ldots, 2007\}$, $C = \{1, 7, 13, \ldots, 2005\}$, $D = \{2, 8, 14, \ldots, 2006\}$, $E = \{4, 10, 16, \ldots, 2008\}$, $F = \{5, 11, 17, \ldots, 2009\}$, fiecare având câte 335 elemente. . . **3 puncte**

Dacă în S există două elemente din A sau două elemente din B, suma lor se divide cu 6, ceea ce încheie soluţia. În caz contrar, în celelalte 4 mulţimi se află cel puţin $673 - 2 = 671$ elemente din S. . . . . **2 puncte**

Considerăm mulţimile $C \cup F$ şi $D \cup E$, fiecare având 670 elemente. Atunci intersecţia lui S cu una dintre cele două mulţimi – fie ea $C \cup F$ – are cel puţin 336 elemente. . . . . **1 punct**

Atunci mulţimile $S \cap C$ şi $S \cap F$ au fiecare cel puţin un element. Suma acestora este multiplu de 6, ceea ce încheie soluţia. . . . . **1 punct**

(Cazul $|D \cup E| \geq 336$ se tratează analog.)

Soluţie. Avem $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SCA = 30°$, deci $SA = SC$. Cum $OA = OC$, rezultă că $SO \perp AC$. . . . . **1 punct**

De aici $LA = LC$. În plus, unghiul $\sphericalangle LAC$ are 60°, deci triunghiul ALC este echilateral. . . . . **1 punct**

Punctul S este centrul triunghiului echilateral LAC, deci $\dfrac{LS}{SO} = 2$. . . . . **1 punct**

Patrulaterul $DBCL$ este paralelogram. Notăm Q centrul său, deci $DQ = QC$. . . . . **1 punct**

Punctul M este centrul de greutate al triunghiului DBC, deci $\dfrac{CM}{MO} = 2$. . . . . **2 puncte**

Din $\dfrac{LS}{SO} = \dfrac{CM}{MO}$, conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă cerinţa. . . . . **1 punct**

Soluţie. Să observăm că liniile selectate spre a fi modificate pot fi considerate consecutive; aceeaşi precizare este valabilă pentru coloane. Mai mult, selectarea unei linii (sau coloane) de două ori nu modifică starea acesteia, deci presupunem că cele x linii sunt distincte şi cele y coloane sunt distincte.

Dacă primele x linii şi primele $50-y$ coloane au fost modificate, se creează un dreptunghi $x \times y$ şi un dreptunghi $(50 - x) \times (50 - y)$ cu toate căsuţele albastre, restul tabloului rămânând roşu. . . . . **1 punct**

Astfel obţinem exact $A = xy + (50 - x)(50 - y)$ căsuţe albastre. . . . . **2 puncte**

a) Numărul $A = 2500 + 2xy - 50(x + y)$ este par, deci nu poate fi egal cu 2011. . . . . **1 punct**

b) Avem $A = 2010 \Leftrightarrow xy - 25x - 25y + 245 = 0 \Leftrightarrow (x - 25)(y - 25) = 380 = 19 \cdot 20$. . . . . **2 puncte**

Pentru $x = 25 + 19 = 44$ şi $y = 25 + 20 = 45$ obţinem cerinţa. **1 punct**

Notă. Numărul necesar de paşi nu este unic.

Soluţie. Pe latura BC a triunghiului considerăm punctul M cu $BB' = BM$. Egalitatea din enunţ devine $AB' = MC$. **1 punct**

Teorema bisectoarei implică $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC}$, de unde $\frac{MC}{B'C} = \frac{AC}{BC}$. . . . . **2 puncte**

Rezultă că triunghiurile MCB' şi ACB sunt asemenea, ... **1 punct**

deci $MC = MB'$. . . . . **1 punct**

Mai mult, $C = \sphericalangle MCB' = \sphericalangle MB'C$. Atunci $\sphericalangle BMB' = 2C$ şi cum triunghiul $BB'M$ este isoscel, rezultă că $\sphericalangle BB'M = 2C$. . . . . **1 punct**

În triunghiul $BB'M$ avem $180° = 2C + 2C + \frac{C}{2}$, adică $C = B = 40°$ şi $A = 100°$. . . . . **1 punct**