OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

CALARASI ETAPA LOCALĂ – 24 IANUARIE 2009

Clasa a V-a

I. Se consideră şirul de numere naturale: 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 , ... şi un al doilea şir, care are ca termeni numerele obținute efectuând suma cifrelor la fiecare din termenii primului şir: 0, 7, 5, 12, 1, 8, 6, 13, …

a) Să se scrie următorii cinci termeni ai primului şir şi următorii cinci termeni ai celui de-al doilea şir.

b) Să se determine al 2009-lea termen din primul şir.

c) Demonstrați că orice număr natural este termen al celui de-al doilea şir.

Relu Ciupea, Oltenița

II. a) Calculați $A=41\cdot 14+41\cdot 34+41$;

b) Cu ce număr putem înmulți numărul A pentru a obține un pătrat perfect? Justificați răspunsul dat.

c) Scrieți toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care sunt divizibile cu 10, numărul a este pătrat perfect şi $a = b + c$.

Eugen Predoiu, Călăraşi

III. La 15 septembrie, un elev de clasa a V-a începe să numere, din unu în unu, până la un miliard. Să presupunem că în fiecare secundă spune un număr. Reuşeşte să termine de numărat până la sfârşitul clasei a V-a? Justificați răspunsul dat.

G.M. 5-6 /2008

IV. Într-un grup află un număr impar de copii care au vârsta de 11 ani sau de 12 ani. Dacă suma vârstelor copiilor din grup este de 200 ani, aflați câți copii au vârsta de 11 ani. Justificați răspunsul dat.

Sorin Furtună, Călăraşi şi Stelică Pană, Chirnogi

Clasa a VI-a

I. a) Să se determine numerele naturale prime a, b, c ştiind că $a + b – c = 6$ şi $b + c = 78$.

Eugenia Vlad, Călăraşi

b) Arătați că un număr de şase cifre de forma $\overline{abaaba}$ este divizibil cu 1001. G.M. 9 /2008

II. a) Stabiliți câte numere naturale cuprinse între 1000 si 2009, împărțite la 9 dau restul 8 şi împărțite la 8 dau restul 7.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b) Fie numerele $x, y, z \in \mathbf{N}$ astfel încât $17x + 14y = 3z$. Arătați că numărul $N =(x + y)(y + z)(z + x)$ se divide cu 102.

Luminița Bucureşteanu, Călăraşi

III. a) Care este măsura unghiului format de minutarul şi orarul unui ceas, atunci când acesta indică ora 4 fix?

b) Care este măsura unghiului format de minutarul şi orarul unui ceas atunci când acesta indică ora 4 şi 12 minute fix?

Sorin Furtună, Călăraşi

IV. a) Găsiți cel mai mic număr natural pătrat perfect divizibil cu 2009.

b) Scrieți numărul 2009 ca o sumă de două pătrate perfecte.

c) Aflați numerele prime $a, b \in N^*$ astfel încât $a^2(a^2 – b^3) = 2009$.

Adriana Olaru şi Ştefan Florin Marcu, Călăraşi

Clasa a VII-a

I. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu m(∠A) = 90° şi m(∠C) = 30°. Bisectoarea unghiului B intersectează latura [AC] în punctul D. Fie M mijlocul laturii [BC] şi E simetricul punctului D faţă de punctul M. Arătaţi că: a) BDCE este romb ; b) AC = 3AD ; c) AM ⊥ CE.

Adriana Olaru, Călăraşi

II. a) Rezolvaţi în R ecuaţia $2[x]+4=3x$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x).

b) Să se determine numărul prim $\overline{abc}$ ştiind că $[\sqrt{\overline{abc}}] = 10$ şi că suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 10.

Georgeta Cioboată, Călăraşi

c) Fie ADCD un patrulater convex în care AB = a , BC = b, CD = c, DA = d şi în care relaţiile $a+b-c\le d, b+c-d\le a, c+d-a\le b, d+a-b\le c$ sunt adevărate simultan. Determinaţi natura patrulaterului ABCD.

G.M. 10 /2008

III. a) Fie $x, y, z\in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{y\sqrt{2}+z}\in Z$. Arătaţi că y este media geometrică a numerelor x şi z.

Aurelia Caţaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

b) Rezolvaţi in Z×Z ecuaţia $\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=-1$

Florica şi Lucian Ioniţă, Călăraşi

IV. Fie ABCD un paralelogram în care măsura unghiului A este mai mică de 90° şi bisectoarea unghiului A intersectează latura (CD) în E.

a) Să se determine relaţia dintre a = AD şi b = AB astfel încât aria patrulaterului ABCE să fie de trei ori mai mare decât aria triunghiului ADE.
b) Perpendiculara în A pe AB şi perpendiculara în C pe BC se intersectează în M. Să se arate că MD ⊥ AC.
c) Notând cu N mijlocul segmentului (AD), arătaţi că dacă BF ⊥ CN, cu F∈CN, atunci triunghiul ABF este isoscel.

Aurelia Caţaros şi Adriana Constantin, Călăraşi

Clasa a VIII-a

I. a) Fie numărul $S=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2009}}$. Determinaţi numerele naturale consecutive a şi b astfel încât S ∈ (a; b).

b) Să se calculeze produsul: $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2009^3-1}{2009^3+1}$.

Adriana Olaru, Călăraşi

II. Fie paralelipipedul dreptunghic [ABCDA'B'C'D'], AB = a, BC = b, AA' = c şi x distanţa de la punctul A la planul (BDA') .

a) Arătaţi că $x=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$;

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b) Arătaţi că dacă $\dfrac{3}{x^2}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2$, atunci paralelipipedul este cub.

III. a) Dacă $a,b\in(0,\infty), a\le b$ şi $x,y\in[a,b]$, arătaţi că $2\le\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\le\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

b) Dacă ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt triunghiuri dreptunghice (A şi A_1 unghiuri drepte), arătaţi că $BC\cdot B_1C_1\ge AB\cdot A_1B_1+AC\cdot A_1C_1$.

Cristina Bornea, Călăraşi

IV. Fie triunghiul echilateral ABC şi S un punct exterior planului (ABC) astfel încât [SA] ≡ [SB] ≡ [SC]. Dacă M este mijlocul segmentului [BC] şi măsura unghiului format de dreptele AC şi SM este de 60°, demonstraţi că SA ⊥ SM.

G.M. 11/2008