

## SOLUȚII

### Problema 1.

**Soluție.** a) Din datele problemei, putem scrie :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b+c}{14} \\ \frac{b}{5} = \frac{c+a}{11} \\ \frac{c}{9} = \frac{a+b}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a = 2b + 2c \\ 11b = 5c + 5a \\ 7c = 9a + 9b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a - 2b - 2c = 0 \\ -5a + 11b - 5c = 0 \\ -9a - 9b + 7c = 0 \end{cases} \text{ . Din primele două ecuații,}$$

reducem termenii care îl conțin pe  $c$  :

$$\begin{cases} 14a - 2b - 2c = 0 \\ -9a - 9b + 7c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 98a - 14b - 14c = 0 \\ -18a - 18b + 14c = 0 \end{cases} \Rightarrow 80a - 32b = 0 \Leftrightarrow 5a = 2b,$$

deci,  $a = 2$  și  $b = 5$ , acestea fiind cele mai mici numere naturale nenule, care verifică egalitatea. Din una din ecuațiile care-l conțin pe  $c$ , deducem  $c = 9$ .

b) Fie  $x$ , numărul inițial. Din datele problemei deducem că  $p \neq 0$  și, în plus :

$$x \left( 1 + \frac{p}{100} \right) = a_1; \quad x \left( 1 + \frac{p}{100} \right) \left( 1 - \frac{p}{100} \right) = a_2; \quad x \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2 \left( 1 - \frac{p}{100} \right) = 1152 \quad (1) \text{ și}$$

$$: \quad x \left( 1 - \frac{p}{100} \right) = b_1; \quad x \left( 1 + \frac{p}{100} \right) \left( 1 - \frac{p}{100} \right) = b_2; \quad x \left( 1 + \frac{p}{100} \right) \left( 1 - \frac{p}{100} \right)^2 = 768 \quad (2)$$

Împărțind egalitățile (1) și (2), membru cu membru, obținem :

$$\frac{1 + \frac{p}{100}}{1 - \frac{p}{100}} = \frac{1152}{768} \Leftrightarrow p = 20 \text{ și apoi } x \left( 1 + \frac{20}{100} \right)^2 \left( 1 - \frac{20}{100} \right) = 1152 \Leftrightarrow x = 1000.$$

### Problema 2.

**Soluție.** a)  $2007^{2011} = (8q - 1)^{2011} = 8s - 1 = 8t + 7$

b) Orice număr întreg are una din formele :  $8k, 8k \pm 1, 8k \pm 2, 8k \pm 3, 8k + 4$

Pătratul său este de forma  $8l, 8l + 1, 8l + 4$

Oricum am alege pătratele din membrul stâng al ecuației nu obținem un număr de forma  $8t + 7$ .

Înseamnă că ecuația nu are soluții în  $\mathbb{Z}$

### Problema 3.

**Soluție.** Fie  $F \in (CA)$  astfel ca  $[CF] \equiv [CB]$  Avem:  $m(\sphericalangle BFC) = 80^\circ$ ,  $m(\sphericalangle DAC) = 80^\circ \Rightarrow AD \parallel BF$   
deci  $[AF] \equiv [BD]$  (1)

De asemenea în  $\triangle AFB$  avem  $m(\sphericalangle FAB) = 50^\circ$  și  $m(\sphericalangle FBA) = 50^\circ \Rightarrow [AF] \equiv [FB]$  (2)

Din (1) și (2) avem că:  $[BD] \equiv [FB] \equiv [EC]$ .

Construim  $\triangle FBM$  echilateral cu  $M \in \text{int}(\triangle CFB)$ .

( $CM$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle C$  și avem  $m(\sphericalangle BCM) = 10^\circ$  și  $[FB] \equiv [MB] \equiv [EC]$ . Avem de asemenea  $m(\sphericalangle MBC) = 20^\circ$ .

$$\text{Avem: } \triangle BMC \equiv \triangle CEB \begin{cases} [BM] \equiv [EC] \\ \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle ECB (LU.L.) \Rightarrow m(\sphericalangle EBC) = 10^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BEA) = 30^\circ \text{ fiind unghi} \\ [BC] \equiv [BC] \end{cases}$$

exterior  $\triangle BEC$ .