

Concursul interjudețean de matematică "Ion Ciolac"

Ediția a IV-a, Craiova, 22 mai 2004

Constantin P. Niculescu și Liliana Niculescu

Această ediție a Concursului "Ion Ciolac" s-a bucurat de participarea a peste 400 de elevi din județele Argeș, Dolj, Gorj, Mehedinți, Olt, Prahova și Vâlcea. Premiul întâi a fost obținut de următorii participanți: Toader Alexandra (clasa a IV-a, Colegiul Național Carol I, Craiova), Schneider Valeriu (clasa a V-a, Colegiul Național Carol I, Craiova), Pădureanu Victor (clasa a VI-a, Colegiul Național Carol I, Craiova), Tuțescu Anca (clasa a VII-a, Colegiul Național Frații Buzești, Craiova), Bucățea Mădălin (clasa a VIII-a, Șc. gen. 37, Craiova), Duță Cătălin (clasa a IX-a, Colegiul Național Carol I, Craiova), Dinu Lavinia (clasa a X-a, Colegiul Național Frații Buzești, Craiova), Diaconu Andrei (clasa a XI-a, Colegiul Național Frații Buzești, Craiova) și Ion Marius (clasa a XII-a, Colegiul Național Carol I, Craiova). Indicăm în continuare problemele propuse.

Clasa a IV-a

1. Un elev a cumpărat 16 caiete și 12 creioane pentru care a plătit 312 lei. Un alt elev a cumpărat 24 de caiete și 18 creioane de același fel cu colegul său.

Ce sumă a încasat librăria de la cei doi copii?

Maria Doran

2. Aflați cifrele a, b, c, d din egalitățile:

(a) $(a - 1) \times (a - 2) = 20$.

(b) $\overline{bb} \times b + 295 = 999$.

(c) $c \times 4 = 9 \times d - 27$.

Catargena Rada

3. (a) Aflați numărul natural a știind că dacă se împarte 25 la $3 \times a - 7$ se obține restul 3.
(b) Completați dreptunghiurile de mai jos cu numere așa încât suma numerelor scrise în oricare trei dreptunghiuri alăturate să fie aceeași.

185		275				219
-----	--	-----	--	--	--	-----

Clasa a V-a

1. Fie $A \subset \mathbb{N}$, o mulțime având simultan proprietățile:

- (a) $1 \in A$.
- (b) Dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$.
- (c) Dacă $3x + 1 \in A$, atunci $x \in A$.

Demonstrați că $\{0; 85; 113; 1024\} \subset A$.

Ion Rotaru

2. Demonstrați că oricare ar fi numerele naturale \overline{aaaa} și \overline{bbbb} scrise în baza 10, are loc inegalitatea

$$\frac{(\overline{aa})^2 + a \cdot \overline{aaa}}{4 \cdot \overline{aaaa}} < \frac{\overline{bbb}}{(\overline{bb})^2 + b \cdot \overline{bbb}}.$$

Dan Mic

3. Aflați cel mai mare număr natural par n astfel încât în mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ să existe 668 de numere care se divid cu 2 dar nu se divid cu 6.

Liliana Niculescu

Clasa a VI-a

1. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + b$, $b + c$ și $c + a$ sunt direct proporționale cu numerele bc , ca și ab . Demonstrați că $a = b = c$.

Nicolae Tălău

2. Aflați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care putem alege semnele $+$ și $-$ astfel încât

$$\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n = 16.$$

R.M.T., Dan Comănescu

3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$, $m(\widehat{DBC}) = 50^\circ$ și $m(\widehat{DAB}) = 40^\circ$. Demonstrați că dacă $(DB$ este bisectoarea unghiului \widehat{ADC} , atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului \widehat{DAB} .

Nicolae Tălău

Clasa a VII-a

1. Rezolvați ecuația:

$$\frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + \dots + \frac{x+98}{99} + \frac{x+99}{100} = 2^5 \cdot 3.$$

Cornelia Picu

2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Notăm cu D , simetricul lui A față de B și cu E simetricul lui A față de C .

(a) Determinați punctul $M \in BC$ pentru care suma $DM + EM$ este minimă.

(b) După același procedeu se construiesc punctele $N \in AC$ și $P \in AB$. Demonstrați că dreptele AM , BN și CP sunt concurente.

Ion Rotaru și Liliana Niculescu

3. În divizia A a campionatului național de fotbal sunt 16 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte câte două meciuri, unul acasă și unul în deplasare. Se acordă 3 puncte pentru victorie, un punct pentru meci egal și nu se acordă nici un punct pentru înfrângere.

Care poate fi diferența maximă de puncte dintre ocupantele locurilor întâi și doi la sfârșitul campionatului?

Monica Stanca

Clasa a VIII-a

1. Fie A o mulțime de numere naturale și $f : A \rightarrow A$ o funcție cu proprietățile:

i) există $x_0 \in A$ astfel încât $f(x_0) \neq x_0$;

ii) $f(m) - f(n) = m - n$ pentru orice $m, n \in A$.

Demonstrați că mulțimea A este infinită.

Gazeta Matematică, Mircea Becheanu

2. Considerăm ecuațiile:

$$1 + 2 + 3 + \dots + x + y^2 = z^2, \quad (1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + x + y^3 = z^2. \quad (2)$$

Demonstrați că:

(a) ecuația (1) are o infinitate de soluții (x, y, z) cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$;

(b) ecuația (2) are o infinitate de soluții (x, y, z) cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Claudiu Coandă

3. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$ iar E și F , mijloacele muchiilor $[SA]$ și $[SC]$. Fie $N \in [SB]$ astfel încât $SN = \frac{2}{3}SB$. Planul (ENF) intersectează SD în M iar planul α dus prin AC paralel cu (ENF) intersectează SD în Q . Calculați:

(a) raportul dintre volumul lui $SMEF$ și volumul lui $SACD$;

(b) raportul $\frac{SQ}{SD}$.

Claudiu Coandă

Clasa a IX-a

1. Fie ABC , un triunghi care nu este echilateral. Notăm cu A_1 , simetricul lui A față de B , cu B_1 , simetricul lui B față de C și cu C_1 , simetricul lui C față de A . Fie O și O_1 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ iar H și H_1 , ortocentrele acestor triunghiuri. Demonstrați că OO_1HH_1 este trapez.

2. Demonstrați că nu există funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să îndeplinească simultan următoarele condiții:

i) $f(f(x) + y) = x + g(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) există $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$, și $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ pentru care

$$(1 + g^2(\alpha) + g^2(\beta))^n = 1 + ng^2(\alpha) + ng^2(\beta).$$

Raluca Ciurcea

3. Demonstrați că dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{k=1}^n \cos 2^k x < \frac{(2^n - 1)\pi}{n \cdot 2^{n+1}} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} 2^n x\right).$$

Iuliana Coravu

Clasa a X-a

1. Mulțimea numerelor naturale nenule se descompune în 2004 progresii aritmetice neconstante care nu au termeni comuni. Demonstrați că în fiecare dintre aceste progresii, rația este mai mare sau egală cu primul termen al progresiei.

2. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$ și funcția $f : A \rightarrow A$ cu proprietatea $f(f(x)) = 1$ pentru orice $x \in A$.

(a) Demonstrați că $f(A)$ are cel mult $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ elemente.

(b) Pentru $n = 4$, aflați numărul funcțiilor cu proprietatea din enunț.

(c) Pentru $n = 2004$, aflați funcția cu proprietatea din enunț pentru care produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2004)$ este maxim.

Liliana Niculescu

3. Fie tetraedrul $OABC$, cu proprietatea $OA \perp OB$, $OB \perp OC$ și $OC \perp OA$. Arătați că dacă

$$OA^2 + CB^2 = 4(\mathcal{A}_{\Delta OAB} + \mathcal{A}_{\Delta OAC} - \mathcal{A}_{\Delta OBC})$$

atunci $m(\widehat{BAO}) + m(\widehat{CAO}) + m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

Nicolae Tălău

Clasa a XI-a

1. Considerăm funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietățile:

- i) funcția f este crescătoare;
- ii) funcția g este continuă;
- iii) funcția $\frac{f}{g}$ este descrescătoare.

Demonstrați că funcția f este continuă.

Dorin Popovici

2. Fie matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât Z comută cu X sau cu Y . Demonstrați că

$$\det(Z + XY) = \det(Z + YX).$$

G.M., Ovidiu Pop

3. O secantă mobilă dusă prin focarul F al parabolei $y^2 = 2px$ intersectează parabola în M și N . Notăm cu M' , N' și E , proiecțiile punctelor M , N și F pe directoarea parabolei. Demonstrați că:

- (a) $EM' \cdot EN' = \text{constant}$.
- (b) MN' trece printr-un punct fix.
- (c) $\frac{1}{MF} + \frac{1}{NF} = \text{constant}$.

Liliana Niculescu

Clasa a XII-a

1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel și a , un element al lui A pentru care există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) $\text{card}\{x \in A \mid ax = 1\} > 1$;

- (b) a nu este inversabil;
(c) există $c \in A$, $c \neq 0$ astfel încât $ac = 0$.

2. Determinați funcțiile continue $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_a^b f(x) dx = \ln \left(\frac{b^b}{a^a} \cdot e^{a-b} \right)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$.

Virgiliu Schneider

3. Demonstrați că dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, neconstantă și periodică, iar $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci graficul lui F nu admite asimptote.

Liliana Niculescu

Soluțiile acestor probleme vor apare în revista de matematică *Țițeica*, editată de Colegiul Național Carol I” din Craiova.

Constantin P. Niculescu
Universitatea din Craiova
Str. A. I. Cuza 13
Craiova 200585

Liliana Niculescu
Colegiul Național „Carol I”
Str. Ion Măiorescu 6
Craiova