OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ   12.02.2011

CLASA   a V-a

1. **Fie numerele: $m = 31 + 34 + 37 + 40 + \ldots + 97 + 100$ şi $n = 38 + 41 + 44 + 47 + \ldots + 95 + 98$.**

a) Calculaţi $2\cdot m - 2\cdot n + 20$.

b) Aflaţi restul împărţirii numărului $p = 30\cdot m - 2\cdot n + 21$ la 7.

2. **Se consideră numărul: $a = 2^{6n+2} + 4^{3n+2} + 8^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.**

a) Aflaţi cea mai mică valoare a lui $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $p\cdot a$ este pătrat perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Aflaţi cea mai mică valoare a lui $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $p\cdot a$ este cub perfect, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. **Se dă produsul: $P = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \quad \cdot 2010\cdot 2011$.**

a) Determinaţi în câte cifre de 0 se termină produsul P.

b) Eliminând din produs toţi multiplii de 2 şi de 5, aflaţi ultima cifră a numărului rămas.

4. **Suma a patru numere este 999. O treime din al treilea este egală cu o pătrime din al patrulea. Primul număr împărţit la al treilea dă câtul şi restul 3, iar al doilea împărţit la al patrulea dă câtul şi restul 4. Aflaţi cele patru numere.**

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Sorin Ion

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011

CLASA a VI-a

1. **Determinaţi tripletele de numere prime (x, y, z) pentru care $x^2y = 216 - xz$.**

2. **Dacă $\overline{abc}$ este divizibil cu 37, atunci fracţia $\dfrac{\overline{bca}+\overline{cab}}{2\cdot\overline{bca}+3\cdot\overline{cab}}$ este reductibilă.**

3. **Se consideră unghiurile drepte AOB şi COD, astfel încât $C \in Int(\widehat{AOB})$, $B \in Int(\widehat{COD})$ şi unghiul AOE alungit.**
   a) **Demonstraţi că unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOC şi BOD este unghi drept.**
   b) **Dacă $3\cdot m(\widehat{AOC}) = 5\cdot m(\widehat{DOE})$, aflaţi măsurile unghiurilor COB şi BOD.**

4. **Se dă triunghiul isoscel ABC, AB=AC. M şi N sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Pe prelungirea lui BN se ia punctul Q, astfel încât NQ=2· BN, $N \in (BQ)$, iar pe prelungirea lui CM se ia punctul P, astfel încât MP=2· CM, $M \in (CP)$. Dacă $\{D\} = PB \cap QC$, demonstraţi că [AD este bisectoarea unghiului BAC.**

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Sorin Ion

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011

CLASA a VII-a

1. **a) Daţi două exemple de numere naturale pătrate perfecte care se termină cu 2025.**
   b) Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale pătrate perfecte care se termină cu 2025.

2. **a) Daţi o soluţie a ecuaţiei $x^2 + y^2 = 1010$ în mulţimea numerelor întregi.**
   b) Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 = 1000 + 10z^2$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

3. **În rombul ABCD, $m(\hat{A})=60^0$. Dacă M este mijlocul laturii AB, $CM \cap BD = \{N\}$, iar ND = 3 cm, aflaţi:**
   a) Perimetrul rombului.
   b) Raportul dintre aria triunghiului BMN şi aria rombului.

4. **a) Demonstraţi că punctele de intersecţie ale bisectoarelor unghiurilor unui dreptunghi sunt vârfurile unui pătrat.**
   b) Prin vârful C al pătratului ABCD se construieşte o dreaptă care intersectează semidreptele (AB şi (AD în M, respectiv N. Demonstraţi că $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\text{constant}$.

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Sorin Ion

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011

CLASA a VIII-a

1. **Dacă a şi b sunt numere reale, astfel încât $a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$, aflaţi valoarea sumelor:**
$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+6$ şi $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+6$.

2. **a) Determinaţi elementele mulţimii $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2-11x$ este număr natural pătrat perfect $\}$.**
b) Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1, 0\}$, există $x\in\mathbb{Z}$, astfel încât numărul $x^2-(2n+1)x$ este pătrat perfect nenul.

3. **În cubul ABCDA'B'C'D', O este centrul feţei CDD'C' şi M este mijlocul muchiei B'C'. Aflaţi:**
a) Măsura unghiului dintre BO şi AD'.
b) Măsura unghiului AOM.

4. **Fie prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D' cu latura bazei AB=6 cm şi înălţimea AA'=12 cm. Dacă $M\in(AA')$, AM=2 cm, $N\in(BB')$, BN=4 cm şi $P\in(CC')$, CP=6 cm, determinaţi:**
a) Distanţa de la punctul A' la dreapta de intersecţie a planelor (MNP) şi (ABCD).
b) Distanţa de la punctul C' la planul (MNP).

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Sorin Ion

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a V-a

BAREM DE CORECTARE

Subiect 1

a) $m - n = 31 + 34 + 37 + (40 - 38) + (43 - 41) + \ldots + (97 - 95) + (100 - 98) =$
$= 102 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{21 \text{ termeni}} = 102 + 42 = 144.$ .... ***3 puncte***

(sau calculul lui m: ***1punct***, calculul lui n: ***1punct***, calcul m-n: ***1punct***)

$2\cdot m - 2\cdot n + 20 = 288 + 20 = 308$.. ***2 puncte***

b) $30\cdot m - 2\cdot n + 21 = 28\cdot m + 2\cdot m - 2\cdot n + 20 + 1 = 28\cdot m + 308 + 1 = \mathcal{M}_7 + 1.$ .... ***1 punct***

Restul împărţirii este 1.. ***1 punct***

Subiect 2

$a = 2^{6n+2} + 4^{3n+2} + 8^{2n+1} = 2^{6n+2} + 2^{6n+4} + 2^{6n+3} = 2^{6n+2}(1 + 4 + 2) = 2^{6n+2}\cdot 7$ .... ***2 puncte***

a) Cel mai mic număr p, astfel încât $p\cdot a$ să fie pătrat perfect este p = 7, având $p\cdot a = 2^{6n+2}\cdot 7\cdot 7 = \left(2^{3n+1}\cdot 7\right)^2$, pătrat perfect. .... ***3 puncte***

b) Cel mai mic număr p, astfel încât $p\cdot a$ să fie cub perfect este $p = 2\cdot 7^2 = 98$, având $p\cdot a = 2^{6n+3}\cdot 7^3 = \left(2^{2n+1}\cdot 7\right)^3$, cub perfect. .... ***2 puncte***

Subiect 3

a) În produs sunt:

402 numere divizibile cu 5: .... ***1 punct***

80 numere divizibile cu 25, ... ***1 punct***

15 numere divizibile cu 125, şi 3 numere divizibile cu 625. .... ***1punct***

În total sunt 402 + 80 + 16 + 3 = 501 factori de 5, cum numărul factorilor de 2 este mai mare, rezultă că numărul P se termină în 501 cifre de 0 . ... ***2 puncte***

b) La fiecare grupă de câte 20 de numere, după eliminarea multiplilor de 2 şi de 5, ultima cifră este 1, deci până la 2000 ultima cifră a produsului numerelor rămase este 1. .... ***1punct***

Ultima cifră a produsului numerelor rămase în P este dat de $u(2001\cdot 2003\cdot 2007\cdot 2009\cdot 2011) = 9$........ ***1punct***

Subiect 4 .

Cele patru numere se pot reprezenta: III: 3x, IV: 4x, I: $3\cdot 3x + 3 = 9x + 3$ şi II: $4\cdot 4x + 4 = 16x + 4$. ***2puncte***

Se obţine ecuaţia: $9x + 3 + 16x + 4 + 3x + 4x = 999$.. ***2 puncte***

De unde x = 31. .... ***1punct***

Numerele sunt: 282, 500, 93, 124.. ***2 puncte***

Obs. Problema se rezolvă şi prin metoda grafică.

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu şi Sorin Ion

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VI-a

BAREM DE CORECTARE

Subiect 1.

$x^2y = 216 - xz \Leftrightarrow x^2y + xz = 216 \Leftrightarrow x(xy + z) = 216$.. ***1punct***

Cum $x \mid 216$ şi x prim, rezultă $x \in \{2, 3\}$.. ***2 puncte***

Dacă x = 2 se obţine 2y + z = 108. Dar 2y şi 108 sunt pare, rezultă z este par, fiind şi prim, rezultă z = 2 şi apoi se obţine y = 53. .... ***2 puncte***

Dacă x = 3 se obţine 3y + z = 72. Dar 3y şi 72 sunt divizibile cu 3, rezultă z este divizibil cu 3, fiind şi prim, rezultă z = 3 şi apoi se obţine y = 23.. ***2 puncte***

Tripletele sunt: (2, 53, 2) şi (3, 23, 3).

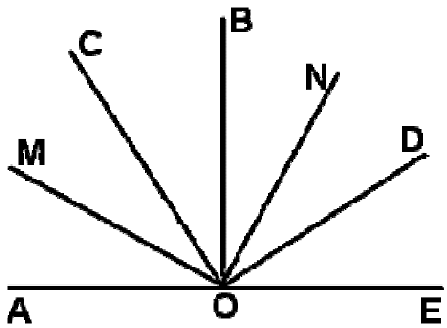
Subiect 2

Dacă $A = \overline{bca} + \overline{cab}$, atunci $\overline{abc} + A = 111(a + b + c) = \mathcal{M}_{37}$, cum $\overline{abc} \vdots 37$, rezultă $A \vdots 37$.................. ***2 puncte***

Dacă $B = 2 \cdot \overline{bca} + 3 \cdot \overline{cab}$, atunci $13 \cdot \overline{abc} + B = 1300a + 130b + 13c + 200b + 20c + 2a + 300c + 30a + 3b = 1332a + 333b + 333c = 37(36a + 9b + 9c) = \mathcal{M}_{37}$, cum $\overline{abc} \vdots 37$, rezultă $B \vdots 37$. .... ***4 puncte***

În concluzie fracţia este reductibilă.. ***1punct***

Subiect 3



a) $m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle COM) + m(\sphericalangle COB) + m(\sphericalangle BON) =$

$$\frac{m\left(\widehat{AOC}\right)}{2} + m\left(\widehat{COB}\right) + \frac{m\left(\widehat{BOD}\right)}{2} = \frac{m\left(\widehat{AOC}\right) + 2 \cdot m\left(\widehat{COB}\right) + m\left(\widehat{BOD}\right)}{2} =$$

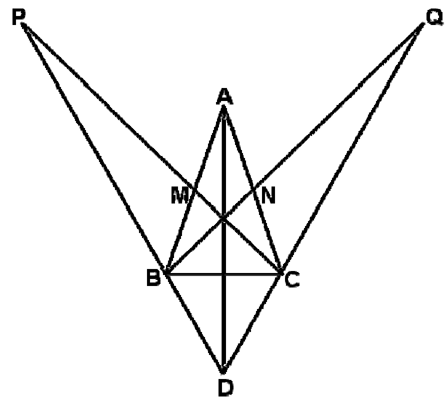
$$\frac{m\left(\widehat{AOC}\right) + m\left(\widehat{COB}\right) + m\left(\widehat{COB}\right) + m\left(\widehat{BOD}\right)}{2} = \frac{90^0 + 90^0}{2} = 90^0.$$

.... ***3 puncte***

b) Dacă notăm $m(\sphericalangle DOE) = 3x$, $m(\sphericalangle AOC) = 5x$, se obţine ecuaţia: $8x = 90^0$, de unde $x = 11^O15'$. .... ***2 puncte***

Şi atunci $m(\sphericalangle DOE) = m(\sphericalangle COB) = 33^O45'$ şi $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle AOC) = 56^O15'$. .... ***2 puncte***

Subiect 4



1) ΔABN≡ΔACM(LUL), rezultă BN=CM.. ***2 puncte***

2) ΔPBM≡ΔQCN(LUL). .... ***2 puncte***

3) ΔDPC≡ΔDQB(ULU), rezultă DB=DC.. ***2 puncte***

4) ΔDAB≡ΔDAC(LLL), rezultă ∢DAB≡∢DAC şi deci [AD este bisectoarea unghiului BAC. .... ***1 punct***

Variantă*: 3') ∢ABC≡∢ACB(AB=AC). (**1 punct**) Din 2 şi 3'), rezultă ∢DBC≡∢DCB, de unde DB=DC. (**1 punct**) Apoi 4) ΔDAB≡ΔDAC(LLL), rezultă ∢DAB≡∢DAC şi deci [AD este bisectoarea unghiului BAC.*

*..(**1 punct**)*

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu şi Sorin Ion

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiect 1

a) $2025 = 45^2$, $1092025 = 1045^2$.. ***2 puncte***

b) $\overline{n045}^2 = (1000n + 45)^2 = 10^6 n^2 + 90000n + 45^2 = \overline{a0000} + 2025 = \overline{a2025}$, pătrat perfect care se termină cu 2025, unde n este orice număr natural nenul.. ***5 puncte***

Subiect 2

a) Problema revine la a scrie 1010 ca sumă de două pătrate. Exemple de soluţii ce se pot da: (29, 13), (31, 7), (−29, 13), …... ***2 puncte***

b) $x^2 + y^2 = 10(100 + z^2) = (9 + 1)(100 + z^2) = (3z + 10)^2 + (z - 30)^2$(o variantă)............... ***3 puncte***

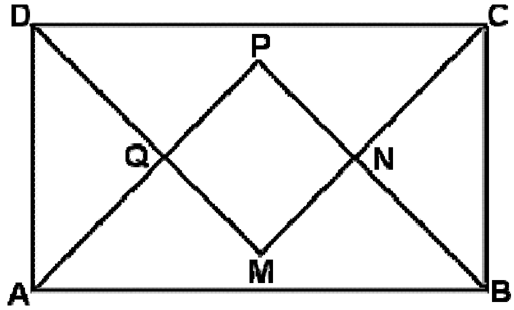
Şi atunci dacă luăm $x = 3z + 10$, $y = z - 30$, arată că orice triplet de forma $(3z + 10, z - 30, z)$, unde $z \in \mathbb{Z}$, este soluţie a ecuaţiei date.. ***2 puncte***

Subiect 3

a) N este centru de greutate în ΔABC, de unde ND = 2· NB şi atunci BD = 4,5 cm,............ **2 puncte**
dar rombul având m(Â)=60⁰, rezultă perimetrul este de 4,5 cm· 4 = 18 cm. ....**2 puncte**

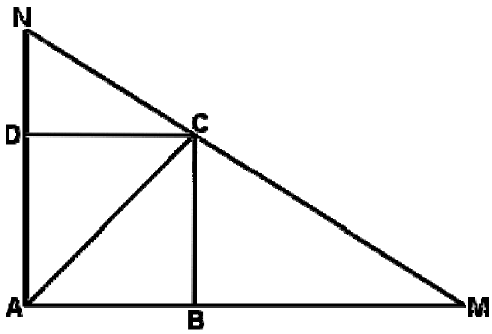
b) Dacă se notează cu S = aria triunghiului BMN, atunci $\mathcal{A}_{BCN} = 2S$, $\mathcal{A}_{BCM} = 2S$, apoi $\mathcal{A}_{ABC} = 6S$ şi $\mathcal{A}_{ABCD} = 12S$, rezultă că raportul dintre aria triunghiului BMN şi aria rombului este 1/12......... **3 puncte**

Subiect 4



a) ΔABP, ΔDCM, ΔBCN, ΔADQ sunt dreptunghice isoscele, rezultă patrulaterul MNPQ are unghiurile drepte, deci este dreptunghi... ***2 puncte***

Apoi PA=PB şi AQ=BN(ΔBCN≡ΔADQ), rezultă PN=PQ şi atunci MNPQ este pătrat... ***2 puncte***



b) $\mathcal{A}_{ACM} + \mathcal{A}_{ACN} = \mathcal{A}_{AMN}$ .... ***1 punct***,
rezultă AM· BC+AN· DC= AM· AN, de unde .

$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BC} = \text{constant}$ ....***2 puncte***

Obs. Se poate da soluţia bazată pe teorema fundamentală a asemănării care se aplică şi în cazul general când ABCD este romb.

DC || AM, rezultă ΔNDC~ΔNAM, de unde $\frac{DC}{AM} = \frac{NC}{MN}$.

BC || AN, rezultă ΔMBC~ΔMAN, de unde $\frac{BC}{AN} = \frac{MC}{MN}$.

Prin adunarea celor două relaţii, membru cu membru se obţine $\frac{DC}{AM} + \frac{BC}{AN} = \frac{NC + MC}{MN} = 1$. DC=BC, rezultă

$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BC} = \text{constant}$.

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu și Sorin Ion

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VIII-a

BAREM DE CORECTARE

Subiectul 1

$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=16$, ... **2 puncte**

rezultă $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=16$. Şi atunci $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+6=20$ .... **2 puncte**

Apoi $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+6=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+4=196+4=200.$ .... **3 puncte**

Obs. Calculul se poate obţine dacă se deduce din condiţia dată că $a = 2 + \sqrt{3}$ şi $b = 2 - \sqrt{3}$, sau invers.

Subiectul 2

a) $x^2 - 11x = k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 44x = 4k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 121 - 4k^2 = 121 \Leftrightarrow (2x - 11)^2 - 4k^2 = 121 \Leftrightarrow$
$(2x - 11 - 2k)(2x - 11 + 2k) = 121$. .... **1 punct**

Scriind toate sistemele care se formează se obţine $A = \{-25, 0, 11, 36\}$.. **2 puncte**

b) $x^2 - (2n + 1)x = k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4(2n + 1)x = 4k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4(2n + 1)x + (2n + 1)^2 - 4k^2 = (2n + 1)^2 \Leftrightarrow$
$(2x - 2n - 1 - 2k)(2x - 2n - 1 + 2k) = (2n + 1)^2$. .... **2 puncte**

O soluţie pătrat perfect nenul se obţine luând $2x - 2n - 1 - 2k = 1$ şi $2x - 2n - 1 + 2k = (2n + 1)^2$.
Care dă $x = (n + 1)^2$. Sau pentru valorile negative dă $x = -n^2$. Pentru $x = (n + 1)^2$ înlocuind dă $(n + 1)^4 - (2n + 1)(n + 1)^2 = (n + 1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1) = n^2(n + 1)^2$, pătrat perfect nenul.. **2 puncte**

Subiectul 3

a) $BC' \parallel AD'$, rezultă $m\left(\widehat{BO, AD'}\right) = m\left(\widehat{BO, BC'}\right) = 30^0$, deoarece BO este mediană în triunghiul echilateral BDC'.

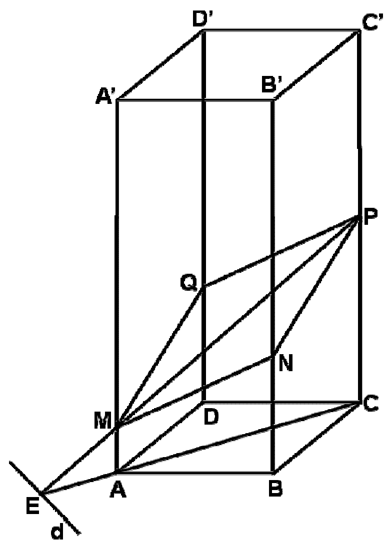
.... **2 puncte**

b) Daca notăm latura cubului cu a, atunci $AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .... **1 punct**

$AM = \sqrt{B'A^2 + B'M^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$. $OM = \frac{B'D}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .... **2 puncte**

Se obtine ca $AM^2 = AO^2 + OM^2$, rezultă $m(\sphericalangle AOM) = 90^0$.. **2 puncte**

Subiectul 4:



a) $MN = \sqrt{6^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $NP = \sqrt{6^2 + (6-4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ... **1 punct**

Dacă $\{Q\} = (MNP) \cap DD'$, atunci patrulaterul MNPQ este romb şi $QN \parallel BD$. Rezultă că dreapta de intersecţie a planelor date este o dreaptă d paralelă cu BD ce conţine punctul E, unde $\{E\} = MP \cap AC$.. **1 punct**

Cum $BD \perp AC$, atunci $AC \perp d$. Din teorema celor trei perpendiculare se obţine că distanţa este A'E. $AM \parallel CP$, rezultă $\Delta EAM \sim \Delta ECP$ şi se obţine $AE = 3\sqrt{2}$, iar din $\Delta A'AE$, $A'E = 9\sqrt{2}$ .... **2 puncte**

b) Distanţa reprezintă lungimea înălţimii din C' pe MP .... **1 punct**

Avem $MP \cdot d(C', (MNP)) = C'P \cdot AC$; $2\sqrt{22} \cdot d(C', (MNP)) = 6 \cdot 6\sqrt{2}$,

rezultă $d(C', (MNP)) = \frac{18\sqrt{11}}{11}$ .... **2 puncte**

Sau: $\mathcal{A}_{AMN} \cdot d(C', (MNP)) = \mathcal{A}_{C'NP} \cdot d(M, (C'NP))$.

Subiecte propuse de prof. Damian Marinescu şi Sorin Ion