CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ
EUCLID
16 . 01 . 2010
Clasa a V -a
SOLUȚII

SUBIECTUL I 1)c) 2) a) 3) c) 4) c) 5) b)

SUBIECTUL II **1)** 18 **2)** 3^2 **3)** 0 **4)** 1 **5)** 3 **6)** 15 **7)** 4 **8)** $\{3,4\}$ **9)** $\{1,3,4,5\}$ şi $\{2,3\}$ sau orice alt exemplu corect **10)** 0

SUBIECTUL III

a) 7

b) 100

c) $2010 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2$, deci $2010 \in B$.

d) $2 \cdot S = 2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$.

e) $S = 2S - S = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) =$
$= (2 + 2^2 + \ldots 2^{99}) + 2^{100} - 1 - (2 + 2^2 + \ldots + 2^{99}) = 2^{100} - 1$

f) Cel mai mare element din *B* este suma tuturor elementelor din *A*, adică $2^{100} - 1$. Deci 2^{100} nu aparține lui *B*

g) Numerele 1,2,3,4,5,6,7 se pot scrie folosind elementele $1, 2, 2^2$. Apoi, de la 8 la 15 se pot scrie adăugând 2^3 la cele scrise anterior. De la 2^4 la $2^5 - 1$ se pot scrie adăugând 2^4 la cele scrise anterior, etc.

SUBIECTUL IV

a) Cel mai mic element al mulțimii *M* este 56789.

b) Cel mai mare element al mulțimii *M* este 98765.

c) 5 şi 6 fiind fixate, rămâne să numărăm în câte feluri putem permuta cifrele 7, 8 şi 9. Permutările sunt următoarele: 789; 798; 879; 897; 978, 987, deci le putem aranja în 6 feluri. Prin urmare, sunt 6 numere care încep cu $\overline{56}$ în această ordine.

d) Trebuie găsite toate numerele $\overline{abcde}$ cu cifre diferite, din mulțimea $\{5,6,7,8,9\}$. Cifra *a* poate fi oricare din această mulțime, deci există 5 posibilități de a o alege. Cifra *b* poate fi oricare din mulțime, mai puțin valoarea aleasă pentru *a*, deci *b* poate lua 4 valori. Cu raționamente asemănătoare ajungem la concluzia că *c* poate lua 3 valori, *d* poate lua 2 valori, iar *e* numai una. Deci, în total, putem forma $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ de numere.

e) Grupăm elementele câte două astfel: elementul $\overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ se grupează cu $\overline{d_1d_2d_3d_4d_5}$ astfel încât $d_1 = 14 - c_1; d_2 = 14 - c_2; d_3 = 14 - c_3; d_4 = 14 - c_4; d_5 = 14 - c_5$
De exemplu, numărul 56789 se va grupa cu numărul 98765. Se observă că suma elementelor din fiecare grupă este 155554 şi cum numărul de grupe este 60, rezultă că suma tuturor elementelor este $155554 \cdot 60 = 9333240$.

f) Numărul elementelor pare este numărul numerelor care se termină în 6 sau în 8. În 6 se termină $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ de numere (raționamet analog cu cel de la punctul **c)**) şi în 8 se termină tot 24 de numere. Deci sunt 48 de numere pare.

g) Ordonând crescător elementele mulțimii *M*, vom avea înaintea elementului 98567 pe toate cele care încep cu 5, 6, 7 sau 8, adică $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \cdot 4 = 96$ de numere. Dintre cele care încep cu 9, înaintea celui dat sunt $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ numere. Deci numărul de ordine al elementului 98567 este $96 + 18 + 1 = 115$.