CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ
EUCLID
16 . 01 . 2010
Clasa a VII -a
SOLUȚII

SUBIECTUL I 1) b) 2) a) 3) d) 4) b) 5) a)

SUBIECTUL II 1) 13, **2)**16, **3)** 135°, **4)** 16, **5)** 40, **6)** 9 **7)** 19 **8)** 0,9 **9)** A **10)** 6 cm

SUBIECTUL III

a) $a_1 + a_2 = 0 + 4 = 4$.

b) $a_{2010} = 9$ pentru că $\frac{1}{21} = 0,(047619)$.

c) $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2010} = 0$.

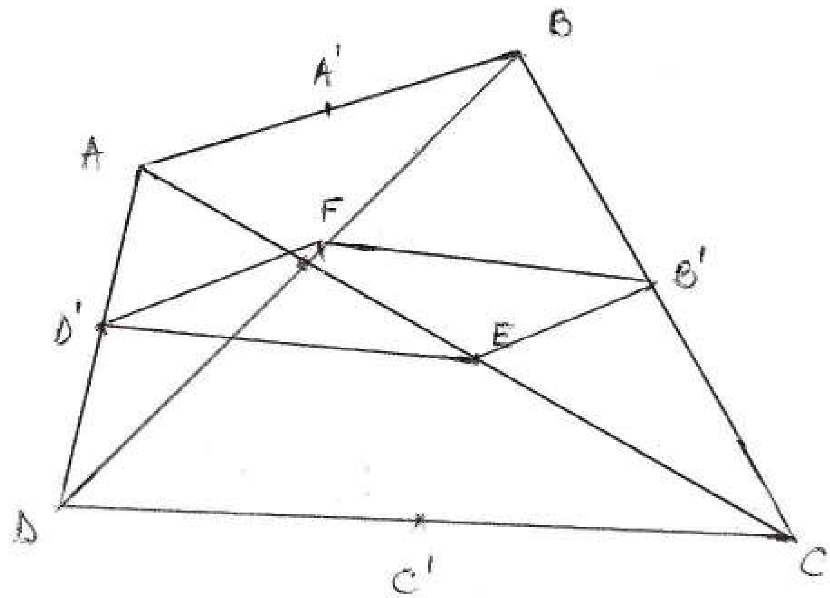
d) $a_1 + a_2 + ... + a_{2010} = 335(0+4+7+6+1+9) = 9045$.

e) $b_1 + b_2 =$7+3=10.

f) $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{2010} = 0$, deoarece $b_4 = 0$

g) $b_1, b_2, ..., b_{101}$ sunt 101 cifre care $\in \{0,1,...,9\}$, mulțime cu 10 elemente, deci (conform principiului cutiei) cel puțin 11 coincid.

IV



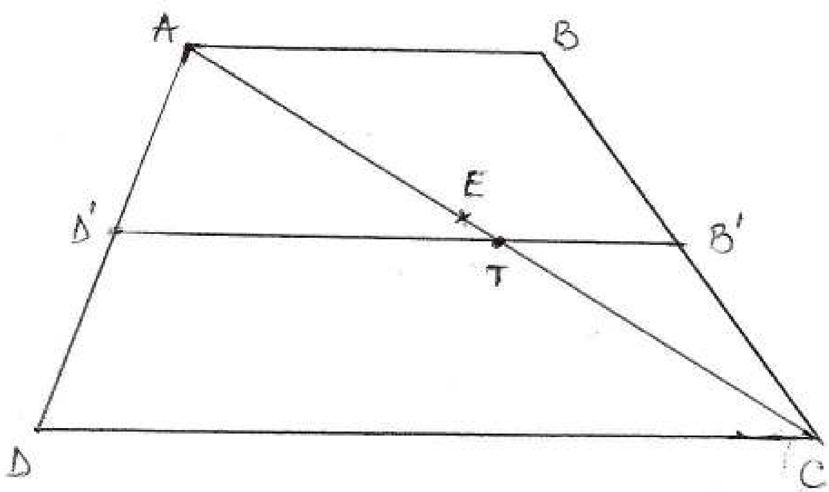
a) $A'B'$ linie mijlocie în ΔABC, deci $A'B' \parallel AC$ și $A'B' = \frac{AC}{2}$. (1)

b) Analog $C'D' \parallel AC$ și $C'D' = \frac{AC}{2}$. (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow A'B' \parallel C'D'$ și $A'B' = C'D'$, deci $A'B'C'D'$ este paralelelogram.

c) $D'F$ linie mijlocie în $\Delta ABD \Rightarrow D'F \parallel AB$ şi $D'F = \dfrac{AB}{2}$, $B'C'$ linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow B'E \parallel AB$ şi $B'E = \dfrac{AB}{2}$. Prin urmare $D'F \parallel B'E$ şi $D'F = B'E$, deci, $D'FB'E$ paralelogram.

d) Am arătat că $A'B'C'D'$ este paralologram, deci diagonalele sale se înjumătațesc. Fie $A'C' \cap B'D' = \{O\}$ (O mijlocul segmentelor $A'C'$ şi $B'D'$). De asemenea, am arătat că $D'FB'E$ este paralologram, deci diagonalele se înjumătățesc. Fie $D'B' \cap FE = \{O'\} \Rightarrow O'$ este mijlocul segmentelor $D'B'$ şi EF. Cum mijlocul unui segment este unic şi O, O' sunt mijloace pentru segmentul $B'D'$, rezultă că ele coincid. Prin urmare dreptele $B'D'$, $A'C'$ şi EF sunt concurente.

e)



Fie $AC \cap B'D' = \{T\}$. $D'T$ linie mijlocie în $\Delta ADC \Rightarrow D'T = \dfrac{DC}{2}$, TB' linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow TB' = \dfrac{AB}{2}$. Deci $D'B' = D'T + TB' = \dfrac{DC}{2} + \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AB + DC}{2}$.

f) Avem $D'E = \dfrac{DC}{2}$ (linie mijlocie) şi $B'E = \dfrac{AB}{2}$, de unde $D'E + B'E = \dfrac{AB + CD}{2} = D'B'$, de unde rezultă $E \in [D'B']$. Dar $D'E \parallel DC$ şi $B'E \parallel AB$, de unde $AB \parallel CD$.

g) Considerăm X un punct din plan. Din inegalitatea triunghiului $XA + XC \geq AC = AO + OC$, $XB + XD \geq BD = BO + OD$. Rezultă că $XA + XB + XC + XD \geq OA + OB + OC + OD \Rightarrow$ suma distanțelor de la O la vârf este minimă.