CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ
EUCLID 24 . 10 . 2009
Clasa a VI –a SOLUȚII

SUBIECTUL I 1) a) 2) b) 3) c) 4) a) 5) c)

SUBIECTUL II 1) 0 **2)** 5 *cm* **3)** $\frac{23}{32}$ **4)** 1 **5)** 8 **6)** 22 **7)** 1 **8)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ deci 3 fracții **9)** 3 **10)** 270, 275

SUBIECTUL III

a) $1 = 2^0 \in A, 2 = 2^1 \in A, 4 = 2^2 \in A, 8 = 2^3 \in A$.

b) Presupunem că $3 \in A \Rightarrow \exists i \in \mathbf{N}$ astfel încât 2^1=3. Pentru i=0$\Rightarrow$1=3 fals. Atunci $\exists i \in N, i \neq 0$ cu 2^i=3$\Rightarrow$ 2 | 3 fals. Analog $6 \notin A$.

c) 3=1+2$\in B$; 5=1+4$\in B$.

d) Dacă $n \in B \Rightarrow n = x_1 + x_2 + ... + x_k$ unde $\{x_1, x_2, ...x_k\} \subset A$ atunci $2n = 2x_1 + 2x_2 + ... + 2x_k$ şi deoarece $\{2x_1, 2x_2, ..., 2x_k\} \subset A$, rezultă $2n \in A$.

e) $A \cap \{1,2,3,....,20\} = \{1,2,4,8,16\}$ are 5 elemente.

f) Mulțimea B conține numerele 1, 2+1, 2^2+1, ...,$2^{2008}+1$, care sunt toate impare, deci conține cel puțin 2009 numere impare.

g) Fie 1023=1024-1=2^{10}-1=2^{9+1}-1= =1+2+2^2+…+2^9 $\in B$.

SUBIECTUL IV

a) 4=2·2, 2 număr prim, deci 4$\in A$. Unica descompunere în produs de 2 factori a lui 5, abstracție făcând de ordinea factorilor, este 5 = 1·5, dar 1 nu este număr prim, deci $5 \notin A$.

b) 33 = 3·11, 34 = 2·17, 35 =5·7, iar 3, 11, 2, 17, 5, 7 sunt numere prime, deci 33$\in A$, 34$\in A$, 35$\in A$. Descompunerile posibile în produs de 2 factori, abstracție făcând de ordinea factorilor ale numărului 36 sunt 1·36, 2·18, 3·12, 4·9, 6·6, dar în fiecare descompunere cel puțin unul dintre factori nu este număr prim, deci $36 \notin A$.

c) Elementele care fac parte din intersecție sunt 4, 6, 9, 10, 14, 15, în număr de 6.

d) Dacă n se divide cu 4 şi $n = p·q$, atunci p se divide cu 4 sau q se divide cu 4 sau ambele numere se divid cu 2. Primele 2 cazuri nu sunt posibile deoarece p şi q sunt numere prime, rămâne deci ca ambele să se dividă cu 2, dar singurul număr par prim este 2, deci p = 2 şi q = 2, de unde n= 4.

e) Fie 4 numere naturale consecutive: a, a+1, a+2, a+3. Avem 4 cazuri posibile, în funcție de restul împărțirii numărului a la 4. Dacă restul este 0 obținem rezultatul cerut. Dacă restul este 1, $a = 4c + 1$ şi atunci a+3 este divizibil cu 4. Dacă restul este 2, $a = 4c + 2$ şi atunci a+2 este divizibil cu 4. Dacă restul este 3, $a = 4c + 3$ şi atunci a+1 este divizibil cu 4.

f) $p_1^2, p_2^2, ..., p_{2009}^2$ sunt elemente ale lui A, unde $p_1, p_2, ..., p_{2009}$ sunt numere prime diferite, deci în mulțime se află cel puțin 2009 elemente;

g) Conform punctului **e)**, dacă ar conține 4 numere naturale consecutive, cel puțin unul din ele ar fi divizibil cu 4, dar conform punctului **d)** atunci acest element trebuie să fie 4 şi deoarece nici 3, nici 5 nu sunt elemente din mulțime, obținem concluzia.