

SUBIECTUL I (20p)

- 1) Care este restul împărțirii numărului 2011 la 5? a) 0 b) 4 c) 1 d) 2
- 2) Care dintre numerele următoare este divizibil cu 10? a) 41 b) 35 c) 12 d) 100
- 3) Care dintre următoarele numere verifică relația $3x+1=13$? a) 4 b) 5 c) 2 d) 3
- 4) Câți divizori naturali are numărul 8? a) 2 b) 3 c) 4 d) 1
- 5) Care este cel mai mare număr natural x care verifică inegalitatea $2x+1<10$? a) 5 b) 6 c) 3 d) 4

SUBIECTUL II (40p)

- 1) Scrieți rezultatul operației $\{1;2;3;4\} \cup \{3;4;5\}$.
- 2) Scrieți un multiplu al lui 11 care să fie număr par.
- 3) Scrieți rezultatul calculului $(5^2 - 10) : 3 + 5$.
- 4) Scrieți toți divizorii naturali ai numărului 11.
- 5) Aflați numărul natural x din egalitatea $x+3=13$.
- 6) Suma a două numere naturale consecutive este 21. Scrieți cele două numere.
- 7) Scrieți rezultatul operației $\{1;2;3;4\} \cap \{3;4;5\}$.
- 8) Scrieți rezultatul operației $\{1;2;3;4\} - \{3;4;5\}$.
- 9) Dați exemplu de un număr care este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 6.
- 10) Scrieți o mulțime cu 3 elemente.

SUBIECTUL III (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,\dots,16\}$.

- a) Să se scrie cel mai mare număr care se poate obține adunând două elemente diferite din mulțimea A .
- b) Să se scrie cel mai mic număr care se poate obține adunând două elemente diferite din mulțimea A .
- c) Să se determine câte pătrate perfecte se pot scrie ca sumă de 2 elemente diferite din mulțimea A .
- d) Să se determine câte cuburi perfecte se pot scrie ca sumă de 2 elemente diferite din mulțimea A .
- e) Să se arate că elementele mulțimii A nu se pot scrie pe o dreaptă, astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie un cub perfect.
- f) Să se arate că elementele mulțimii A nu se pot scrie pe un cerc, astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie un pătrat perfect.
- g) Să se scrie elementele mulțimii A pe o dreaptă, astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie un pătrat perfect.

SUBIECTUL IV (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră mulțimea $A = \{x \mid x = 3^i \text{ sau } x = 2 \cdot 3^i, i \in \mathbb{N}\}$. Pentru fiecare submulțime finită

și nevidă a mulțimii A , considerăm suma tuturor elementelor sale, iar rezultatele acestor

sume vor forma o mulțime pe care o notăm cu B . (De exemplu $1 \in B$, deoarece $\{1\} \subset A$, iar $7 \in B$, deoarece $\{1, 6\} \subset A$)

- a) Să se verifice că $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ și $6 \in A$. b) Să se verifice că $4 \notin A$ și $7 \notin A$.
- c) Să se arate că $4 \in B$ și $5 \in B$. d) Să se arate că, dacă $n \in B$, atunci $3n \in B$.
- e) Dacă $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, să se arate că $3S - S = 3^{n+1} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- f) Să se arate că numărul $3^{n+1} - 1 \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- g) Să se calculeze numărul de elemente ale mulțimii $B \cap \{1,2,3,\dots,2011\}$.

SUBIECTUL I (20p)

- 1) Care dintre următoarele fracții este echivalentă cu $\frac{3}{5}$? a) $\frac{30}{50}$ b) $\frac{10}{6}$ c) $\frac{6}{4}$ d) $\frac{1}{2}$
- 2) Care dintre următoarele fracții este ireductibilă? a) $\frac{10}{12}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{50}{100}$ d) $\frac{3}{6}$
- 3) Care dintre următoarele numere este divizibil cu 3? a) 102 b) 101 c) 100 d) 104
- 4) Cum se numește un unghi a cărui măsură este de 90° ? a) obtuz b) ascuțit c) drept d) nul
- 5) Dacă un segment $[AB]$ are lungimea de 8cm , iar punctul M este mijlocul segmentului, care este lungimea segmentului $[MB]$? a) 2 cm b) 4 cm c) 8 cm d) nu se poate preciza

SUBIECTUL II (40p)

- 1) Să se scrie cel mai mare pătrat perfect cuprins între 10 și 99 .
- 2) Să se scrie în câte semiplane împarte o dreaptă un plan.
- 3) Să se scrie o fracție subunitară ireductibilă.
- 4) Să se calculeze media aritmetică a numerelor 6 și 8.
- 5) Să se afle cel mai mare divizor comun al numerelor 14 și 21.
- 6) Scrieți o valoare a cifrei a pentru care numărul $\overline{2a5}$ este divizibil cu 3.
- 7) Aflați valoarea lui x din ecuația $3x + 7 = 9$.
- 8) Dați un exemplu de număr care se divide cu 4 și cu 6 dar nu se divide cu 24.
- 9) Împărțim un unghi drept în 5 unghiuri congruente cu interioarele disjuncte. Scrieți măsura unui unghi din cele 5
- 10) Exprimați în minute măsura unui unghi de 3°

SUBIECTUL III (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră mulțimea $A = \{2^i \cdot 5^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ și suma $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $a \in \mathbb{Q}$, $0 < a < 1$.

- a) Să se verifice că $1 \in A$, $4 \in A$, $5 \in A$ și $10 \in A$. b) Să se verifice că $3 \notin A$ și $6 \notin A$.
- c) Să se arate că $S - aS = 1 - a^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. d) Să se arate că $S = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- e) Să se arate că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 2$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- f) Să se arate că există 10 numere naturale consecutive care nu sunt în mulțimea A .
- g) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi numerele naturale distincte $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$,
avem $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{5}{2}$.

SUBIECTUL IV (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Vom numi „*triunghi*”, reuniunea segmentelor determinate de 3 puncte necoliniare din plan. Cele 3 puncte se vor numi vârfurile „*triunghiului*”, iar segmentele laturile „*triunghiului*”.

- a) Câte segmente se pot forma unind câte 2 puncte dintr-o mulțime de 4 puncte date?
- b) Câte „*triunghiuri*” diferite au toate vârfurile într-o mulțime de 4 puncte, oricare 3 necoliniare?
- c) Câte „*triunghiuri*” diferite au toate vârfurile într-o mulțime de 4 puncte necoliniare, din care 3 sunt coliniare?
- d) Câte segmente se pot forma unind câte 2 puncte dintr-o mulțime de 5 puncte date?
- e) Câte „*triunghiuri*” diferite au toate vârfurile într-o mulțime de 5 puncte, oricare 3 necoliniare?
- f) Să se arate că putem colora cu două culori segmentele cu extremitățile într-o mulțime de 5 puncte, oricare 3 necoliniare, astfel încât oricare „*triunghi*” cu toate vârfurile în această mulțime să nu aibă laturile de aceeași culoare.
- g) Să se arate că oricum am colora cu două culori segmentele cu extremitățile într-o mulțime de 6 puncte, oricare 3 necoliniare, există un „*triunghi*” cu toate vârfurile în această mulțime și cu toate laturile de aceeași culoare.

Test conceput de prof. LAVINIA SAVU și CONSTANTIN BĂRĂSCU

SUBIECTUL I (20p)

- 1) Care dintre numerele de mai jos este cel mai mare? a) $\sqrt{2012}$ b) $\sqrt{9}$ c) $\sqrt{2011}$ d) $\sqrt{7}$
- 2) Care este rezultatul calculului $\sqrt{20} : \sqrt{5}$? a) 2 b) 0 c) 4 d) $\frac{1}{2}$
- 3) Care este media geometrică a numerelor 4 și 9? a) 8 b) 6 c) 5 d) 9
- 4) Care este aria unui pătrat cu latura de 2 cm? a) 8cm^2 b) 4cm^2 c) 6cm^2 d) $4\sqrt{2}\text{cm}^2$
- 5) Care dintre numerele următoare este irațional? a) $\frac{5}{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{9}$ d) 1,(4)

SUBIECTUL II (40p)

- 1) Un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit de 60° . Aflați măsura celui alt unghi ascuțit
- 2) Scrieți măsura unghiului format de diagonalele unui pătrat.
- 3) Aflați perimetrul unui pătrat cu latura de 7 cm. 4) Scrieți prima zecimală a numărului $\sqrt{50}$.
- 5) Câte numere raționale conține mulțimea $\{\sqrt{n} \mid 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}\}$?
- 6) Aflați valoarea lui x din proporția $\frac{\sqrt{6}}{x} = \frac{2}{\sqrt{24}}$.
- 7) Care este suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex?
- 8) Care sunt elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \leq 1\}$?
- 9) Cum se numește punctul în care se intersectează medianele unui triunghi?
- 10) Care este rezultatul calculului $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$?

SUBIECTUL III (15p)

O soluție a ecuației $X \cup Y = A$, unde A este o mulțime, este o pereche (X, Y) formată din două mulțimi care verifică relația $X \cup Y = A$. Perechile de mulțimi (X_1, Y_1) și (X_2, Y_2) sunt egale, dacă $X_1 = X_2$ și $Y_1 = Y_2$. (De exemplu ecuația $X \cup Y = \{5\}$ are următoarele 3 soluții $(X = \{5\}, Y = \emptyset)$; $(X = \{5\}, Y = \{5\})$, $(X = \emptyset, Y = \{5\})$)

- a) Să se scrie toate soluțiile ecuației $X \cup Y = \{1\}$.
- b) Să se scrie toate soluțiile ecuației $X \cap Y = \emptyset$, unde $X, Y \subset \{1\}$.
- c) Să se scrie toate soluțiile ecuației $X \cup Y = \{1, 2\}$.
- d) Să se scrie toate soluțiile ecuației $X \cap Y = \emptyset$, unde $X, Y \subset \{1, 2\}$.
- e) Dacă avem relația $X \cup Y = \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$, atunci câte dintre cele 4 situații sunt corecte: 1° $\begin{cases} 1 \in X \\ 1 \in Y \end{cases}$ 2° $\begin{cases} 1 \in X \\ 1 \notin Y \end{cases}$ 3° $\begin{cases} 1 \notin X \\ 1 \in Y \end{cases}$ 4° $\begin{cases} 1 \notin X \\ 1 \notin Y \end{cases}$?
- f) Câte soluții are ecuația $X \cup Y = \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$?
- g) Câte soluții are ecuația $X \cap Y = \emptyset$, unde $X, Y \subset \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$?

SUBIECTUL IV (15p)

Se consideră triunghiul ABC . Pe laturile AB și AC construim în exterior paralelogram

$ABDE$ și $ACFG$, de arie S_1 respectiv S_2 . Dreptele DE și FG se întâlnesc în H . Se

construiește în exteriorul triunghiului paralelogramul $BCIJ$, astfel încât BJ este paralel și

egal cu HA . Notăm cu S_3 aria paralelogramului $BCIJ$. Mai notăm $BJ \cap DE = \{M\}$ și $CI \cap GF = \{N\}$.

- a) Să se arate că $BMHA$ este paralelogram. b) Să se arate că $CNHA$ este paralelogram.
- c) Să se arate că $BMNC$ este paralelogram. d) Să se arate că aria lui $BMHA$ este S_1 .
- e) Să se arate că aria lui $CNHA$ este S_2 . f) Să se arate că aria lui $BMNC$ este S_3 .
- g) Să se arate că $S_1 + S_2 = S_3$. Test conceput de prof. LAVINIA SAVU și prof. SIMONA SFRANCIOG

SUBIECTUL I (20p) 1) Care dintre cele de mai jos este dezvoltarea expresiei $(2+x)^2$?

- a) $4+x^2$ b) $4+4x+x^2$ c) $4+2x+x^2$ d) $4x^2$

2) Care este rezultatul calculului $\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$? a) $\sqrt{3}$ b) 0 c) $6\sqrt{9}$ d) 6

3) Cu cât trebuie amplificată fracția $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ pentru a raționaliza numitorul? a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}+1$ d) $-\sqrt{3}+1$

4) Câte laturi are un patrulater? a) 5 b) 3 c) 4 d) 6

5) Care este lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de 2 cm ? a) $\sqrt{2}\text{ cm}$ b) 4 cm c) $2\sqrt{2}\text{ cm}$ d) $2\sqrt{3}\text{ cm}$

SUBIECTUL II (40p)

1) Să se scrie cu ce expresie trebuie completat spațiul punctat, pentru a fi adevărată egalitatea $(x+5)^2 = x^2 + \dots + 25$.

2) Să se scrie cu ce expresie trebuie completat spațiul punctat, pentru a fi adevărată egalitatea $x^2 - 9 = (x-3)(\dots)$.

3) Să se rezolve ecuația $3x+15=45$. 4) Să se calculeze $\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right) : \frac{2x}{(x+2)(x-2)}$.

5) Să se scrie valoarea de adevăr a propoziției " $6^{-1} \in (0,1)$ ".

6) Cât este aria unui pătrat cu lungimea laturii de 5 cm ?

7) Cât este aria unui triunghi echilateral cu lungimea laturii de 4 cm ?

8) Cât este perimetrul unui pătrat cu aria de 16 cm^2 ?

9) Cât este perimetrul unui triunghi echilateral cu aria de $\sqrt{3}\text{ cm}^2$?

10) Scrieți lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic care să fie numere naturale în ordine crescătoare.

SUBIECTUL III (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră mulțimea $A = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2011}\}$ și suma $S = a + a^2 + \dots + a^{2011}$, unde $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$

a) Să se verifice că $aS = a^2 + a^3 + \dots + a^{2012}$. b) Să se arate că $aS - S = a^{2012} - a$.

c) Să se arate că $S = \frac{a^{2012} - a}{a - 1}$. d) Să se arate că $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2011}} < 1$.

e) Să se arate că dacă $x, y > 0$, atunci $x + y > \sqrt{x^2 + y^2}$.

f) Să se arate că dacă $x, y > 0$, atunci $\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

g) O transformare a mulțimii de numere reale X în mulțimea Y constă în înlocuirea a două elemente arbitrare a și b cu elementele $\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)$ și $\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)$. Să se arate că dacă transformăm mulțimea A în A_1 , mulțimea A_1 în $A_2, \dots$ și mulțimea A_{2010} în A_{2011} , atunci mulțimea A_{2011} va avea toate elementele supraunitare.

SUBIECTUL IV (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră în spațiu o mulțime M formată din 5 puncte, oricare 3 necoliniare, oricare 4 necoplanare și o mulțime P formată din 17 puncte, oricare 3 necoliniare.

a) Să se calculeze câte segmente au ambele capete în mulțimea M .

b) Alegem 2 puncte din mulțimea M . Câte triunghiuri au 2 vârfuri în punctele alese și cel de-al treilea într-unul din cele rămase în mulțimea M ?

c) Câte segmente diferite au ambele capete într-o mulțime de 3 puncte date?

d) Câte triunghiuri au toate vârfurile în puncte din mulțimea M ?

e) Să se arate că prin fiecare punct al mulțimii M putem duce câte un plan astfel încât oricare două plane să nu se intersecteze.

f) Să se arate că există un plan care trece printr-un punct din mulțimea P , care lasă 8 puncte din mulțimea P într-o parte a spațiului și celelalte 8 puncte ale mulțimii P în cealaltă parte a spațiului.

g) Colorăm segmentele care au capetele în punctele mulțimii P cu 3 culori. Să se arate că există un triunghi cu toate vârfurile în mulțimea P și care are laturile colorate cu o singură culoare.

Test conceput de prof. LAVINIA SAVU și prof. GABRIEL RĂDUCAN —