Clasa a V a BAREM DE CORECTARE

Oficiu	(10p)
I.(20p)	1. (4p) c); 2. (4p) d); 3. (4p) a); 4. (4p) c); 5. (4p) d);
II.(40p)	**1) (4p)** $\{1,2,3,4,5\}$ **2) (4p)** 22 sau orice alt raspuns corect **3) (4p)** 10 **4) (4p)** 1, 11 **5) (4p)** 10 **6) (4p)** 10, 11 **7) (4p)** $\{3;4\}$ **8) (4p)** $\{1;2\}$ **9) (4p)** 9 sau orice alt raspuns corect **10) (4p)** $\{3;4;5\}$ sau orice alt raspuns corect

SUBIECTUL III

a) 31 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 2

e) Al doilea numar ar trebui sa se adune cu cel din fata si cu cel din spate si sa dea 8 respectiv 27, ceea ce este imposibil, fiind mai mic decat 8.

f) Numarul 16 ar trebui adunat cu cel din fata si cu cel din spate si sa dea 25, ceea ce este imposibil.

g) 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8

SUBIECTUL IV

a) $1=3^0\in A$, $2=2\cdot 3^0\in A$, $3=3^1\in A$, $6=2\cdot 3^1\in A$.

b) Presupunem $4\in A\Rightarrow\left(4=3^i \text{ fals}\right)$ sau ($4=2\cdot 3^i, i\in\mathbf{N}$, fals).

Presupunem $7\in A\Rightarrow$ ($7=3^i, i\in\mathbf{N}$, fals) sau ($7=2\cdot 3^i$, fals).

c) $\{1,3\}\subset A\Rightarrow 4\in B$. $\{2,3\}\subset A\Rightarrow 5\in B$.

d) Dacă $n\in B$, înseamnă că n e sumă de 3^i şi $2\cdot 3^j$, $i, j\in\mathbf{N}$. Atunci $3n$ e sumă de $3\cdot 3^i$ şi $3\cdot 2\cdot 3^j$, deci e sumă de 3^{i+1} şi $2\cdot 3^{j+1}\Rightarrow 3n\in B$.

e) $3S-S=3+3^2+3^3+...+3^{n+1}-1-3-3^2-...-3^n=3^{n+1}-1$.

f) $3^{n+1}-1=2\left(1+3+3^2+...+3^n\right)=2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+...+2\cdot 3^n$,

fiecare termen al sumei fiind din $A\Rightarrow 3^{n+1}-1\in B$.

g) Se arată că $\{1,2,...,8\}\subset B$. Apoi $\{9,9+1,...,9+8,2\cdot 9,2\cdot 9+1,...,2\cdot 9+8\}\subset B$, deci $\{9,10,...,26\}\subset B$. Se continuă cu $\left\{3^3,3^3+1,...,3^3+26,2\cdot 3^3,2\cdot 3^3+1,...,2\cdot 3^3+26\right\}\subset B$ şi procedând aşa, după caţiva paşi ajungem la relaţia $B\supset\{1,2,3,...,2011\}$, deci intersecţia are 2011 elemente.

Clasa a VI -a

Oficiu	(10p)
I.(20p)	1. (4p) a); 2. (4p) b); 3. (4p) a); 4. (4p) c); 5. (4p) b);
II.(40p)	**1) (4p)** 81 **2) (4p)** 2 **3) (4p)** $\frac{3}{4}$ sau alt exemplu corect **4) (4p)** 7 **5) (4p)** 7 **6) (4p)** 2 sau alt exemplu corect **7) (4p)** $\frac{2}{3}$ **8) (4p)** 12 sau alt exemplu corect **9) (4p)** 18° **10) (4p)** $180'$

SUBIECTUL III

a) Evident. **b)** Evident.

c) Fie $S=1+a+a^2+...+a^n$ si $aS=a+a^2+a^3+...+a^{n+1}$ Atunci, scăzând relaţiile, obţinem $S(a-1)=a^{n+1}-1$. **d)** $S=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

e) Folosind punctul **d)** deducem că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^k}=\dfrac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)<2$.

f) Notăm $a=1\cdot 2\cdot ...\cdot 11$ şi atunci $a+2,a+3,...,a+11$ sunt 10 numere naturale consecutive care nu aparţin mulţimii A.

g) Deoarece $1+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{5^s}=\dfrac{1-\frac{1}{5^{s+1}}}{1-\frac{1}{5}}<\frac{5}{4}$, rezultă

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\le\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^t}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^t}\right)<2\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$, unde t este cel mai mare exponent al lui 2 sau 5 din scrierea numerelor $a_1,a_2,...,a_n$.

SUBIECTUL IV

a) Se pot forma 6 segmente. **b)** Avem 4 „triunghiuri". **c)** Avem 3 „triunghiuri".

d) 10 segmente. **e)** 10 „triunghiuri".

f) Dacă punctele sunt A,B,C,D,E, atunci avem segmentele albe: $[AB],[BC],[CD],[DE]$ şi $[EA]$ iar negre sunt $[AC],[AD],[BE],[BD],[CE]$.

g) Considerăm cele 5 segmente care pleacă dintr-un punct A. Cel puţin 3 (să zicem $[AB],[AC]$ şi $[AD]$) au aceeaşi culoare. Dacă unul dintre segmentele $[BC],[BD]$ sau $[CD]$ va avea aceeaşi culoare, problema s-a rezolvat. Dacă nu, vom avea „triunghiul" BCD care rezolvă problema.

Clasa a VII –a

Oficiu	**(10p)**
I.(20p)	**1. (4p) a); 2. (4p) a); 3. (4p) b); 4. (4p) b); 5. (4p) b);**
II.(40p)	**1) (4p)** 30° **2) (4p)** 90° **3) (4p)** 28 *cm* **4) (4p)** 0 **5) (4p)** 3 **6) (4p)** 6 **7) (4p)** 360° **8) (4p)** 0, 1 **9) (4p)** centrul de greutate **10) (4p)** 0

SUBIECTUL III

a) $(X=\{1\},Y=\varnothing)$; $(X=\{1\},Y=\{1\})$, $(X=\varnothing,Y=\{1\})$

b) $(X=\{1\},Y=\varnothing)$; $(X=\varnothing,Y=\varnothing)$; $(X=\varnothing,Y=\{1\})$.

c) $(X=\{1,2\},Y=\varnothing)$; $(X=\{1,2\},Y=\{1\})$; $(X=\{1,2\},Y=\{2\})$; $(X=\{1,2\},Y=\{1,2\})$; $(X=\{1\},Y=\{1,2\})$;$(X=\{2\},Y=\{1\})$;$(X=\{2\},Y=\{1,2\})$;$(X=\varnothing,Y=\{1,2\})$;$(X=\{1\},Y=\{2\})$;. **d)** $(X=\varnothing,Y=\varnothing)$;$(X=\varnothing;Y=\{1\})$;$(X=\varnothing,Y=\{2\})$; $(X=\varnothing,Y=\{1,2\})$; $(X=\{1\},Y=\{2\})$; $(X=\{1\},Y=\varnothing)$;$(X=\{2\},Y=\{1\})$;$(X=\{2\},Y=\varnothing)$;$(X=\{1,2\},Y=\varnothing)$.

e) Corecte sunt primele 3.

f) Vom avea 3 situaţii favorabile pentru elementul 1, 3 situaţii favorabile pentru elementul 2, 3 situaţii favorabile pentru elementul 3,…..,3 situaţii favorabile pentru elementul 2011.Deci vom avea $\underbrace{3\cdot3\cdot\ldots\cdot3}_{20011\,ori}=3^{2011}$ soluţii ale ecuaţiei.

g) Se procedează tot ca la **f)** şi vom găsi tot câte 3 cazuri favorabile. Deci numărul soluţiilor va fi de 3^{2011}.

SUBIECTUL IV

a) $BM\parallel HA$ şi $AB\parallel HM$, deci $BMHA$ este paralelogram.

b) $CNHA$ este paralelogram pentru că au laturile opuse două câte două paralele.

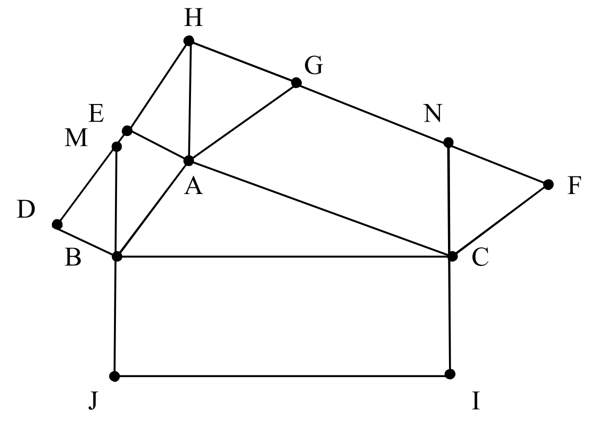
c) $BM\parallel CN$, fiind paralele cu HA şi $BM=CN$ fiind egale cu HA. Deci $BMNC$ este paralelogram.

d) Aria paralelogramului $BMHA$ este S_1, având aceeaşi bază şi înălţime cu paralelogramul $BDEA$.

e) Aria paralelogramului $CNHA$ este S_2, având aceeaşi bază şi înălţime cu paralelogramul $ACFG$.

f) Aria paralelogramului $BMNC$ este S_3, având aceeaşi bază şi înălţime cu paralelogramul $BCIJ$.

g) Triunghiul MHN este egal cu ABC (LUL) deci aria MHN = aria $ABC=S$. Poligonul $HMBCN$ are aria S_1+S_2+S şi totodată are aria $S+S_3$, deci $S_1+S_2=S_3$.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "EUCLID"
05 03 2011 Clasa a VIII -a
BAREM DE CORECTARE

Notă:
- **Pentru orice soluție corectă, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct , dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Oficiu	**(10p)**
I.(20p)	**1. (4p) b); 2. (4p) b); 3. (4p) c); 4. (4p) c); 5. (4p) c);**
II.(40p)	**1) (4p)** **2) (4p)** x **3) (4p)** x **4) (4p)** 1 **5) (4p)** A **6) (4p)** 25 **7) (4p)** $\sqrt{48}$ **8) (4p)** **9) (4p)** $6\,cm$ **10) (4p)** 3, 4, 5sau alt exemplu corect

SUBIECTUL III

a) Se verifică prin calcul direct. **b)** Rezultă din **a)**. **c)** Rezultă din **b)**.

d) Se pune $a=\frac{1}{\ }$ în **c)** şi rezultă $\frac{}{}+\frac{}{}+...+\frac{}{}=\dfrac{\frac{1}{2^{2012}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\ }-1}=1-\frac{}{}$.

e) Prin ridicare la pătrat rezultă $x^2+y^2+2xy>x^2+y^2$, evident.

f) Aducem la numitor în membrul stâng şi obținem

$$\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}+x+y+\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}=\frac{2(x+y)}{(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)}=\frac{2(x+y)}{2xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

g) Din punctele anterioare rezultă că o transformare păstrează suma inverselor elementelor. Aşadar, suma inverselor elementelor mulțimii este egală cu suma inverselor elementelor mulțimii A care este mai mică decât 1. Rezultă că toate elementele din sunt supraunitare.

SUBIECTUL IV

a) Vom avea câte 4 segmente care au acelaşi punct de plecare, deci vor fi $\frac{4\ \ 5}{\ }$ segmente în total, deoarece fiecare segment este numărat de ori.

b) Vom găsi 3 astfel de triunghiuri.

c) Sunt 3 alegeri posibile.

d) Vor fi $\frac{10\ \ 3}{\ }$ triunghiuri conform punctelor **a), b).** şi **c).**

e) Punctele mulțimii determină 10 drepte care trec prin câte dintre ele. Alegem un plan care nu este paralel cu niciuna dintre aceste drepte. Prin fiecare punct al mulțimii ducem câte un plan paralel cu planul ales şi acesta verifică cerința.

f) Ducem ca mai sus 17 plane care trec prin punctele mulțimii P şi nu se intersectează. Vom numerota cele 17 plane alese de la stânga la dreapta cu . Planul cu numărul 9 rezolvă cerința.

g) Alegem un punct şi toate cele 16 segmente care pleacă din el. 6 dintre acestea vor fi colorate la fel. Dacă există un segment cu vârfurile în cele 6 puncte care au aceeaşi culoare, problema este rezolvată. Dacă nu , toate segmentele care au vârfuri în aceste 6 puncte sunt colorate în două culori. Dintre acestea, alegem un punct şi considerăm cele 5 segmente determinate de el şi celelalte puncte. Vor exista 3 dintre ele care să fie colorate la fel (să zicem AB, AC, AD). Dacă unul dintre segmentele BD, BC sau CD sunt colorate cu acea culoare, problema este rezolvată. Dacă nu, triunghiul BCD va avea laturile colorate cu a treia culoare.