SUBIECTUL I **COMPETITI**

Soluție. (2p oficiu) Notăm cu a, b, c, d numărul fetelor voleibaliste, fetelor handbaliste, băieților voleibaliști, respectiv pe cel al băieților handbaliști. Din datele problemei avem că $\frac{a+b}{3}=\frac{c+d}{4}$, $\frac{a+c}{4}=\frac{b+d}{5}$, $a+b+c+d\le 70$ și $b=17$. 3p

Din $4(a+b)=3(c+d)$, cum numerele 3 și 4 sunt prime între ele, rezultă că 3 divide $a+b$, deci $\frac{a+b}{3}=\frac{c+d}{4}=k\in\mathbb{N}$. 3p

Deducem că $a+b+c+d=7k, k\in\mathbb{N}$, prin urmare numărul total al copiilor este multiplu de 7. ....2p

Analog obținem că $a+b+c+d=9l, l\in\mathbb{N}$, adică numărul total al copiilor este multiplu de 9. Rezultă că numărul total al copiilor este multiplu de $[7,9]=63$ și, cum este cel mult egal cu 70, înseamnă că este 63. ....2p

Atunci $k=9, l=7$, apoi $a+b=27, c+d=36, a+c=28, b+d=35$. Întrucât $b=17$, deducem că $a=10$, iar $c=d=18$. În concluzie, joacă volei 18 băieți. 3p

SUBIECTUL II **VALENTE**

Soluție. (2p oficiu) Valoarea maximă a expresiei $x-2y+3z$ se atinge când x și z sunt maxime și y este minim și este $10-2\cdot(-5)+3\cdot 10=50$. Rezultă că $(10,-5,10)$ este singurul triplet admisibil (x,y,z) cu proprietatea că $x-2y+3z=50$, așadar valența numărului 50 este 1...4p

Valoarea minimă a expresiei $x-2y+3z$ se atinge când x și z sunt minime și y este maxim, deci este $-5-2\cdot 10+3\cdot(-5)=-40$. Deducem că nu există triplete admisibile (x,y,z) cu proprietatea că $x-2y+3z=-50$, așadar valența numărului -50 este 0.....4p

Dacă $-5\le x\le 10$, $-5\le y\le 10$, $-5\le z\le 10$ și $x-2y+3z=0$, atunci $x+3z\in\{-10,-8,...,18,20\}$. Cercetând fiecare situație în parte, găsim în total $4+5+5+5+6+5+5+6+5+5+6+5+5+ \quad +6+5+5=83$ triplete admisibile, prin urmare valența lui 0 este 83...5p

SUBIECTUL III **COMOARA**

Soluție. (2p oficiu) a) Deoarece DS = SO, atunci $\sphericalangle SDO\equiv\sphericalangle SOD$. Dreptele paralele TC și SD, tăiate de secanta CD, formează unghiuri alterne interne congruente, deci $\sphericalangle SDO\equiv\sphericalangle TCO$. Însă $\sphericalangle SOD\equiv\sphericalangle TOC$, ca unghiuri opuse la vârf. Din aceste relații rezultă că $\sphericalangle TCO\equiv\sphericalangle TOC$, deci ΔTOC este isoscel, cu $TO = TC$. Obținem că $TS = TO + SO = TC + DS$. 4p

b) Cum $NP = ME$, rezultă că $EP = MN = \frac{TC+DS}{2}=\frac{TS}{2}$. 2p

Din teorema liniei mijlocii în trapez, MN și DS sunt drepte paralele și, folosind reciproca teoremei liniei mijlocii în triunghiul TDS, deducem că E este mijlocul lui TS. În ΔSPT, segmentul PE va fi mediană și va fi egal cu jumătatea laturii pe care cade, prin urmare ΔSPT este dreptunghic în P.
3p

c) Fie $\{F\}=CD\cap MN$. Folosind reciproca teoremei liniei mijlocii în ΔCDS, NF va fi linie mijlocie în acest triunghi; urmează că $ME=FN=\frac{DS}{2}$, deci $FP = FN + NP = FN + ME = DS$.

Cum FP și DS sunt drepte paralele, rezultă că $FPSD$ este un paralelogram, de unde PS și CD sunt drepte paralele. 2p

Deoarece $PS\perp TP$, atunci $CD\perp TP$. În concluzie, comoara se găsește în piciorul perpendicularei din T pe CD, punct care se poate determina în absența stejarului S...2p