OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A V-A

1. a) Calculați: $2143 \cdot 2008 - 1936 \cdot 2008 - 207 \cdot 1999 - 9 \cdot 206$.
b) Determinați cel mai mic multiplu al lui 153 , a cărui scriere zecimală are cinci cifre. Justificați răspunsul.

***

c) Să se determine restul împărțirii numărului $2^{1006} \cdot 3^{1002} \cdot 4^{2008}$ la 5.

Rodica şi Dumitru Bălan

2. a) Să se afle cel mai mare număr par de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea $\overline{abcd} + \overline{dcba} = 9009$.

Mariana Coadă

b) O studentă constată că suma dintre anul naşterii ei şi suma cifrelor acestuia este egală cu 2008. În ce an s-a născut studenta? Justificați răspunsul.

Milu Cârmaciu

3. Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 2008. Elevii Andrei şi Matei şterg pe rând, începând cu Andrei, câte un număr. Pierde elevul care este obligat să şteargă primul un multiplu al lui 3 sau un multiplu al lui 7. Care elev câştigă, Andrei sau Matei? Justificați răspunsul.

***

4. Suma a 20 numere naturale este 2005. Suma a 7 dintre ele este 900 şi a altor 6 numere 601. Să se demonstreze că printre cele douăzeci de numere există cel puțin trei numere pare.

Mariana Coadă

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A VI-A

1. Să se determine numărul de elemente al mulțimii

$$A=\{(a, b, c) \,/\, 240a + 80b + c = 2008,\ a, b, c \in \mathbb{N}^*\}.$$

Problemă propusă de prof. Laura Marin

2. Câți termeni trebuie adunați în suma $1 + 2 + 3 + \ldots$ pentru a obține un număr format din trei cifre identice?

Problemă propusă de prof. Veronica Grigore

3. Fie numărul $P=2004^{n^2+n} \cdot 2007^{p^2+2} \cdot 2009^{m^2+m+1}$ cu n, m, p numere naturale nenule. Calculați ultima cifră a lui P (discuție după numărul p).

Problemă propusă de prof. Nicoleta Balaş

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC (fiecare unghi al triunghiului are măsura egală cu 60^0) şi două semidrepte $[AD$, $[BE$ paralele duse prin vârfurile sale, astfel încât punctele D şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AB, punctele D şi E sunt de aceeaşi parte a dreptei AB, iar punctele D şi E sunt în interiorul unghiului $\sphericalangle ACB$. Ştiind că suma măsurilor unghiurilor într-un triunghi este egală cu 180^0, să se arate că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DAC$ şi $\sphericalangle EBA$ se intersectează sub un unghi de 60^0 sau 120^0.

*****

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A VII-A

1. Să se determine numerele reale x, y, z astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile: $[x]\cdot\{y\}=1004\sqrt{2}$, $\{y\}\cdot|z|=1$ şi $|z|\cdot[x]=2008\sqrt{2}$, unde $[a]$ reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real a, iar $\{a\}=a-[a]$.

Problemă propusă de prof. Vasile Duma

2. Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sunt elemente ale mulțimii $\{-1, 1\}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

a) Dacă $n=2008$, să se arate că există o alegere a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2008}$ astfel încât $a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+\ldots+a_{2007}\cdot a_{2008}+a_{2008}\cdot a_1=0$.

b) Ce condiție trebuie să satisfacă numărul natural n pentru ca să existe $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, elemente ale mulțimii $\{-1, 1\}$, cu proprietatea $a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+\ldots+a_{n-1}\cdot a_n+a_n\cdot a_1=0$?

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

3. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic, D piciorul înălțimii din A şi $P\in(AB)$, $Q\in(AC)$ astfel încât $\sphericalangle BDP\equiv\sphericalangle DAC$ şi $\sphericalangle CDQ\equiv\sphericalangle DAB$. Să se arate că $PQ \parallel BC$.

Problemă propusă de prof. Nicolae Stănică, Marius Damian

4. În triunghiul ABC se consideră $AD\perp BC$, $D\in[BC]$ şi punctul E, simetricul punctului A față de punctul D. Ştiind că măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABEC$ sunt invers proporționale respectiv cu numerele $0,(3)$; 1; $0,(3)$ şi 0,2, să se arate că:

a) $d(D, CE)=\dfrac{1}{4}AC$;

b) $A_{ABEC}=AE^2$;

c) $AB=2\sqrt{DE\cdot DB}$;

d) $AD<\dfrac{AB+AC}{4}$.

Problemă propusă de prof. Vasile Duma

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A VIII-A

1. a) Să se arate că, pentru orice numere reale a, b, c, are loc inegalitatea:

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \le a^2+b^2+c^2$$

b) Dacă $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$, să se determine minimul expresiei $E(x, y, z)=x+y+z$.

Problemă propusă de prof. Marin Dolteanu

2. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O şi arie $42\sqrt{3}$ cm^2. Fie punctul $V \notin (ABC)$ astfel încât $VO \perp (ABC)$, $VO=\sqrt{21}$ cm.

a) Să se arate că $(VBC) \perp (VEF)$;

b) Să se afle suma măsurilor unghiurilor diedre determinate de fețele laterale ale piramidei obținute, cu planul bazei;

c) Să se arate că $\sin\alpha < \sin\beta$, unde α este măsura unghiului diedru format de două fețe laterale alăturate ale piramidei iar β este măsura unghiului format de planele (VBC) şi (VAF).

Problemă propusă de prof. Vasile Duma

3. Să se determine toate soluțiile numere naturale nenule, ale ecuației:

$$xyz+xy+yz+xz+x+y+z=2007$$

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

4. Se consideră un dreptunghi cu laturile de lungimi 1 cm şi respectiv 3 cm. În interiorul acestui dreptunghi sunt plasate 433 de puncte colorate în 4 culori diferite. Arătați că există un cerc de rază $\frac{1}{5}$ cm, care să conțină în interior cel puțin două puncte de aceeaşi culoare.

Problemă propusă de prof. Laura Marin

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A IX-A

1. Să se arate ca oricare ar fi 2^k+1 numere prime mai mari ca 2, există cel puțin două care au diferența divizibila cu 2^{k+1} (k număr natural nenul).

Problemă propusă de prof. Bătrânețu Petre

2. Mulțimile finite A şi B satisfac egalitatea

$$\frac{1}{card\left(A\cap B\right)}+\frac{1}{card\left(A\cup B\right)}+\frac{1}{card\,\mathcal{P}\left(A\cup B\right)}=\frac{19}{24}$$

unde $card\,M$ reprezintă numărul elementelor mulțimii M iar $\mathcal{P}$ (M) este mulțimea tuturor submulțimilor lui M. Să se justifice egalitatea $A=B$.

Problemă propusă de prof. Marian Baroni

3. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a, b, c\in\left(0, \infty\right)$, avem inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c\cdot(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a\cdot(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b\cdot(a+b+c)}}\le\frac{3}{2}$$

Problemă propusă de prof. Cerasela Momoiu

4. În triunghiul ABC, cu $AB\neq AC$, punctul D este mijlocul laturii BC, I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $DI\cap AB=\{E\}$, $AD\cap EC=\{S\}$.

a) Să se demonstreze că $\vec{r_I}=\dfrac{a\vec{r_A}+b\vec{r_B}+c\vec{r_C}}{a+b+c}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.

b) Să se calculeze valoarea raportului $\dfrac{SC}{SE}$ în funcție de a, b, c.

Prelucrare prof. Constantin Ursu

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A X-A

1. Se consideră funcția $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^x+9^{\frac{1}{x}}$.

a) Să se demonstreze că $5^{\log_5 9}\in\mathbb{Q}$.

b) Să se demonstreze că $f(\log_5 3)\in\mathbb{N}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $\left[\sqrt{\log_5 9};+\infty\right)$.

d) Să se rezolve în $\mathbb{R}^*$ ecuația $5^x+9^{\frac{1}{x}}=28$.

Problemă propusă de prof. Romeo Zamfir

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{[\sin x]}{1-\{\sin x\}}=\frac{\{\sin x\}}{1+\sin^2 x}$, unde cu $[a]$ şi $\{a\}$ s-a notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Problemă propusă de prof. Dumitru şi Rodica Bălan

3. Demonstrați pentru orice $n\geq 3$ şi orice $k>0$ are loc inegalitatea

$$\log_{x_3}\left(x_2^{\frac{k}{x_2+x_3+x_4}}\right)+\ldots+\log_{x_n}\left(x_{n-1}^{\frac{k}{x_{n-1}+x_n+x_1}}\right)+\log_{x_1}\left(x_n^{\frac{k}{x_n+x_1+x_2}}\right)\geq\frac{n\cdot k\cdot\sqrt{n}}{3\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}},$$

unde $x_i\in(0;1),\forall i=\overline{1,n}$ sau $x_i\in(1;+\infty)$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Problemă propusă de prof. Constantin Dragomir

4. Demonstrați că, pentru orice număr complex z cu $|z|=1$ şi orice număr natural nenul n este adevărată inegalitatea $n^2-\left[\mathrm{Re}\left(z^2+z^4+\ldots+z^{2n}\right)\right]^2\geq\left[\mathrm{Im}\left(1+z^2+z^4+\ldots z^{2n}\right)\right]^2$.

Problemă propusă de prof. Laura Marin

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A XI-A

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, $\forall n \geq 1$.

a) Demonstrați că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător şi nemărginit.

b) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{x_n^2} = 1$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{y_n - 1} - 3y_n + 2}{y_n - 1}$, unde $y_n = \frac{2n}{x_n^2}$.

Problemă propusă de prof. Marin Dolteanu

2. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietățile $a_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $b_{3k+1} = a_{3k+2}$, $b_{3k+2} = a_{3k+3}$, $b_{3k+3} = a_{3k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dacă definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = a_n\left(\frac{1}{2} - b_n\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{3n} x_k$.

Problemă propusă de prof. Laura Marin

3. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu $A^2 + B^2 = AB$ şi $BA = 0_2$. Să se arate că $(A+B)^{2008} = A^{2008} + B^{2008}$.

Problemă propusă de prof. Constantin Ursu

4. Pentru ce valori ale lui n există cel puțin 2008 matrici pătratice simetrice de ordinul n având toate elementele 1 sau -1 şi suma elementelor de pe diagonala principală egală cu zero?

Problemă propusă de prof. Marian Baroni

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 26 IANUARIE 2008
GALAȚI

CLASA A XII-A

1. Fie p un număr prim, $p \geq 3$, iar $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{\hat{0}\}$. Pe $\mathbb{Z}_p$ considerăm înmulțirea claselor de resturi.

a) Să se arate că, dacă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$, atunci $\hat{a}$ este simetrizabil.

b) Să se calculeze $\hat{1}^{-1} + \hat{2}^{-1} + ... + \widehat{p-1}^{-1}$ şi $\hat{1} \cdot \hat{2} + \hat{2} \cdot \hat{3} + ... + \widehat{p-2} \cdot \widehat{p-1}$.

Problemă propusă de prof. Vasile Popa

2. Să se determine un subgrup cu exact 2008 elemente al grupului multiplicativ al matricelor pătratice inversabile de ordinul al doilea.

Problemă propusă de prof. Marian Baroni

3. Determinaţi funcţia $f : R \to (0, +\infty)$, care verifică proprietăţile: f este funcţie continuă, $f(0) = 1$ şi $f(x) = (1 + x^2)\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt\right]$, $(\forall) x \in R$.

Problemă propusă de prof. Arhire Felix

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive şi
$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$

Problemă propusă de prof. Iuliana Duma

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru 3 ore.