
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$ .... 1 p

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$ .... 1 p

$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}}$ .... 1 p

Adunând cele 3 relaţii, obţinem: $2\geq 2\left(\frac{\sqrt{ab}}{ab}+\frac{\sqrt{bc}}{bc}+\frac{\sqrt{ca}}{ca}\right)$ .... 1 p

Aducând la acelaşi numitor, obţinem cerinţa problemei .... 1 p

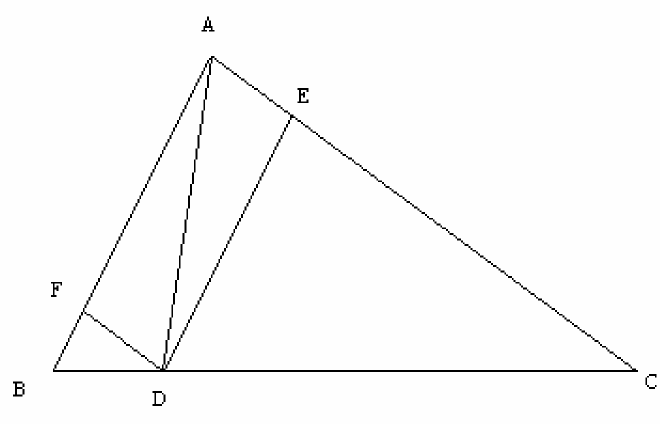
4. Construim $DE\|AB$ si $DF\|AC\Rightarrow AF=DE$ si $AE=DF$ 1p

$\Delta CDE\sim\Delta CBA\Rightarrow\frac{CD}{BC}=\frac{DE}{AB}\Leftrightarrow AB\cdot DC=BC\cdot DE$ 2p

$\Delta BDF\sim\Delta BCA\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{DF}{AC}\Leftrightarrow AC\cdot BD=BC\cdot DF$ 1p

$AB\cdot DC+AC\cdot BD=BC\cdot(DE+DF)=BC\cdot(AF+DF)>BC\cdot AD$ 2p

Dacă $D=B$ sau $D=C$ avem egalitate 1p



Olimpiada Națională de Matematică
- etapa locală - 13.02.2010
Barem de corectare – Clasa a VII-a – varianta 1

1. $4x^2+9xy+5y^2=0 \Leftrightarrow 4x^2+4xy+5xy+5y^2=0 \Leftrightarrow$ 2p

$\Leftrightarrow 4x(x+y)+5y(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(4x+3y)=0 \Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow x=-y$ sau $x=-\frac{5y}{4}$ 1p

Pentru $x=-y \Rightarrow \frac{2x+3y}{3x+4y}=1\in\mathbb{N}$ 1p

Pentru $x=-\frac{5y}{4} \Rightarrow \frac{2x+3y}{3x+4y}=2\in\mathbb{N}$ 1p

2. 1. $\frac{3a}{b+5c}=\frac{b}{3a+5c}=\frac{5c}{3a+b}=\frac{3a+b+5c}{6a+10c+2b}=\frac{3a+b+5c}{2(3a+b+5c)}=\frac{1}{2}$ .... 2 p

$\frac{3a}{b+5c}=\frac{1}{2}\Rightarrow b+5c=6a/\cdot 2\Rightarrow 2b+10c=12a$ (1)

$\frac{b}{3a+5c}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2b=3a+5c$ (2)

$\frac{5c}{3a+b}=\frac{1}{2}\Rightarrow 10c=3a+b$ (3) .... 2 p

Din (1) şi (2) $\Rightarrow 3a+5c+10c=12a\Rightarrow 15c=9a\Rightarrow c=\frac{9}{15}a\Rightarrow c=\frac{3}{5}a$ (4) .... 1 p

Din (3) şi (4) $\Rightarrow 10c=3a+b\Rightarrow 10\frac{3}{5}a=3a+b\Rightarrow 3a=b\Rightarrow b=3a$ (5) .... 1 p

Înlocuind (4) şi (5) în relația cerută $\Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{5c}\right)(2a+b+5c)=\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{3a}\right)\left(2a+3a+5\cdot\frac{3}{5}a\right)=\left(\frac{1}{2a}+\frac{2}{3a}\right)8a=\frac{7}{6a}\cdot 8a=\frac{28}{3}$. .... 1 p

3. Înmulțim relația $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ cu 2 şi obținem $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=2$ .... 1 p

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ .... 1 p

Folosind inegalitatea mediilor, obținem: