OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a VII- a

13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

a) $x+n\geq n+1,\forall x\in\mathbb{N}^*$	1p
$2x+n+1\geq n+3,\forall x\in\mathbb{N}^*$	1p
Finalizare	1p
b) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+2009}{2010}>2009,\forall x>1$	1p
$\frac{5}{2x+3}+\ldots+\frac{2013}{2x+2011}<2009,\forall x>1$	1p
Pentru $x=0$ raționament analog	1p
$x=1$ soluție unică	1p

SUBIECTUL II (7p)

a) $a_1=\frac{1}{2}>0;\quad a_2=1-\frac{1}{a_1+1}=\frac{a_1}{a_1+1}>0$ $a_3=1-\frac{1}{a_1a_2+1}=\frac{a_1a_2}{a_1a_2+1}>0$ ………………..	2p
$a_{2010}=1-\frac{1}{a_1a_2\ldots a_{2009}+1}=\frac{a_1a_2\ldots a_{2009}}{a_1a_2\ldots a_{2009}+1}>0$	1p
b) $a_2=\frac{a_1}{a_1+1}\Rightarrow a_2(a_1+1)=a_1\Rightarrow a_2a_1+a_2=a_1\Rightarrow a_2=a_1-a_1a_2$ $a_3=\frac{a_1a_2}{a_1a_2+1}\Rightarrow a_3(a_1a_2+1)=a_1a_2\Rightarrow a_3=a_1a_2-a_1a_2a_3$ ………………… $a_{2010}=\frac{a_1a_2\ldots a_{2009}}{a_1a_2\ldots a_{2009}+1}\Rightarrow a_{2010}=a_1a_2\ldots a_{2009}-a_1a_2\ldots a_{2009}a_{2010}$	2p
Adunăm relațiile de mai sus şi obținem: $a_1+a_2+\ldots+a_{2010}=2a_1-a_1a_2\ldots a_{2009}a_{2010}=1-a_1a_2\ldots a_{2010}<1$	2p

Subiectul III (7p)

$a+b+c=$ impar $\Rightarrow$ unul sau toate trei impare	1p
Presupun $a\leq b\leq c$ şi studiez cazurile $a=1$ (nu convine) $a=2\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=c=4$ (nu convine) sau $b=3,c=6$ (nu convine deoarece nu verifică inegalitatea triunghiulară)	2p
$a=3\Rightarrow b=c=3\Rightarrow$ triunghi echilateral	1p

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Moscaliuc A.

Dacă $a \geq 4 \Rightarrow b, c > 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow$ pentru $a \geq 4$ nu mai există situații convenabile	2p
Analog pentru celelalte situații de ordonare a numerelor a, b, c	1p

Subiectul IV (7p)

a) $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{DC}$ (1) **din teorema bisectoarei**	**1p**
$\triangle AND \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AD}{DC}$ $(2) \Rightarrow$ **din (1) și (2)** $\frac{AM^2}{MC^2} = \frac{AN^2}{ND^2}$ (3)	**2p**
$\triangle AND \sim \triangle DBN \Rightarrow ND^2 = AN \cdot NB$ **și finalizare**	**1p**
b) $m(\sphericalangle NDB) = m(\sphericalangle CDQ) = x \Rightarrow m(\sphericalangle NDB) = m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAC) = x$	**1p**
DM **bisectoare** $\Rightarrow m(\sphericalangle ADM) = m(\sphericalangle MDC) = 45^\circ$ $\Rightarrow m(\sphericalangle MDQ) = m(\sphericalangle DMQ) = 45^\circ + x$	**2p**

Subiecte și bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Moscaliuc A.