MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN
Strada Ateneului 320112, Nr. 1, Reşiţa, Caraş-Severin, ROMÂNIA
Tel: 0255-214238; Fax: 0255-216042
E-mail: isjcaras@cs.ro; Web: http://www.cs.isj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2010 – FAZA LOCALĂ
13.02 2010

CLASA A VII-A

I. a) Determinaţi (x, y) $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2 \cdot \sqrt{(y-1)^2} + 1 = 2010$.

b) Arătaţi că există un număr prim p $\leq$ 37 şi două numere întregi *a, b* cu proprietatea $|a| = |b| = 1$ astfel încât

$$\frac{1}{49} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 42} + \frac{1}{42 \cdot 83} + \cdots + \frac{1}{1969 \cdot 2010}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{5} + \frac{a}{67}\right).$$

II. Numerele a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_{n-1}, a_n sunt direct proporţionale cu numerele: $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \ldots, \frac{1}{n\cdot(n+1)}, \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$. Dacă $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 5760$ şi $a_{n-1} - a_n = 40$, să se afle n, a_1 şi a_n .

III. Fie triunghiul ABC (m($\sphericalangle A$) = 90°), AB < AC şi AD $\perp$ BC, D $\in$ (BC). M este mijlocul laturii BC şi paralela prin D la AC intersectează pe AM în E.

a) Demonstraţi că ADEC este trapez isoscel.

b) Dacă (AM este bisectoarea $\sphericalangle$ DAC , exprimaţi valoarea raportului $\frac{DM}{MC}$.

c) AD $\cap$ CE = { F }. Dacă ABFM este romb, calculaţi m($\sphericalangle ACB$).

IV. a) Fie ABCD un paralelogram, M simetricul punctului B faţă de punctul D şi N situat pe dreapta BC astfel încât B $\in$ (CN) şi BN = 2 · BC. Demonstraţi că punctele M, A, N sunt coliniare.

b) Fie ABCD un patrulater convex în care AB = a, BC = b, CD = c, DA = d şi în care relaţiile: $a + b - c \leq d, b + c - d \leq a, c + d - a \leq b, d + a - b \leq c$ sunt adevărate simultan. Determinaţi natura patrulaterului ABCD.

G.M./2009

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează de la 0 la 7 puncte.