BAREM

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010
CLASA A VII- A

SUBIECTUL I

Rezolvaţi în **N*** ecuaţia:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{2n}{(n+1)(n+3)}+\frac{3n}{(n+3)(n+6)}+\frac{4n}{(n+6)(n+10)}+\frac{5n}{(n+10)(n+15)}=\frac{n+5}{2n+5}.$$

Prof. Alexandru Banu, Cernişoara, Vâlcea

Rezolvare :

$n\left(\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{(n+1)(n+3)}+\frac{3}{(n+3)(n+6)}+\frac{4}{(n+6)(n+10)}+\frac{5}{(n+10)(n+15)}\right)=$ **2p**

$n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+6}+\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+10}+\frac{1}{n+10}-\frac{1}{n+15}\right)=$ **2p**

$n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+15}\right)=\frac{15}{n+15}$ **1p**

Deci $\frac{15}{n+15}=\frac{n+5}{2n+5}$ **0,5p**

Finalizare n=10 ....**1,5p**

Oficiu **3p**

www.mategl.com

SUBIECTUL II

a) Determinaţi valoarea raportului $\frac{17a-7b}{7a+3b}$, ştiind că : $\frac{2a-b}{a+2b}=\frac{1}{2}$.

G.M.10

Rezolvare :

$\frac{2a-b}{a+2b}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2(2a-b)=a+2b$ **1p**

$a=\frac{4}{3}b$ **1p**

Înlocuind în raport obţinem : $\frac{17a-7b}{7a+3b}=\frac{b\frac{47}{3}}{b\frac{37}{3}}$ **1p**

Dacă b=0 $\Rightarrow \frac{2a}{a}=\frac{1}{2}$ Fals $\Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow valoarea\ raportului\ 1,(270)$…………………….**1p**

b) Fie a,b,c,k$\in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a^{4k}}{b^{2k}c^{2k}}$, $\frac{b^{4k}}{a^{2k}c^{2k}}$, $\frac{c^{4k}}{a^{2k}b^{2k}}$ să fie numere naturale. Demonstraţi că : $a^{6k}+b^{6k}+c^{6k}=3(a^2b^2c^2)^k$.

G.M.7-8-9/2009

Rezolvare :

$$\frac{a^{4k}}{b^{2k}c^{2k}}=\left(\frac{a^2}{bc}\right)\in \mathbb{N} \Longrightarrow a^2=bcm, m\in \mathbb{N}^*$$

Analog avem $b^2=acn, n\in \mathbb{N}^*$ şi $c^2=bap, p\in \mathbb{N}^*$ **……………………………..1,5p**

Înmulţind relaţiile obţinem $a^2b^2c^2=a^2b^2c^2\,mnp$. Cum a,b,c$\in \mathbb{N}^* \Longrightarrow mnp=1 \Longrightarrow m=n=p=1 \Longrightarrow a=b=c$

…………………………………………………………………1p

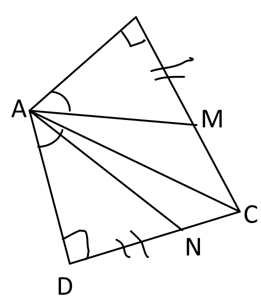
$a^{6k}+b^{6k}+c^{6k}=3(a^2b^2c^2)^k \Longrightarrow 3a^{6k}=3a^{6k}$ **……………………………………………………0,5p**

Oficiu …………………………………………………………………..3p

SUBIECTUL III

a) În patrulaterul ABCD, unghiurile $\measuredangle ABC$ şi $\measuredangle ADC$ sunt drepte. Pe laturile [BC] şi [DC] luăm punctele M şi respectiv N, astfel încât BM=DN şi $\measuredangle BAM \equiv \measuredangle$DAN. Să se arate că BC=CD şi că diagonalele patrulaterului ABCD sunt perpendiculare.

Rezolvare :



$\Delta ABM \equiv \Delta ADN(C.U.) \Longrightarrow [AB]\equiv[AD]$ ……… **1.5p**

$\Delta ABC \equiv \Delta ADC(C.I.) \Longrightarrow [BC]\equiv[DC]$…………….**1.5p**

$\measuredangle$BAC$\equiv \measuredangle DAC$ şi $[AB]\equiv[AD] \Longrightarrow AC\perp BD$ ……. **1p**

b) Pe un cerc sunt scrise numerele naturale de la 1 la N, astfel încât fiecare două numere vecine să aibă cel puţin o cifră comună. Să se găsească cel mai mic număr N pentru care se poate realiza acest lucru şi să se dea un astfel de exemplu.

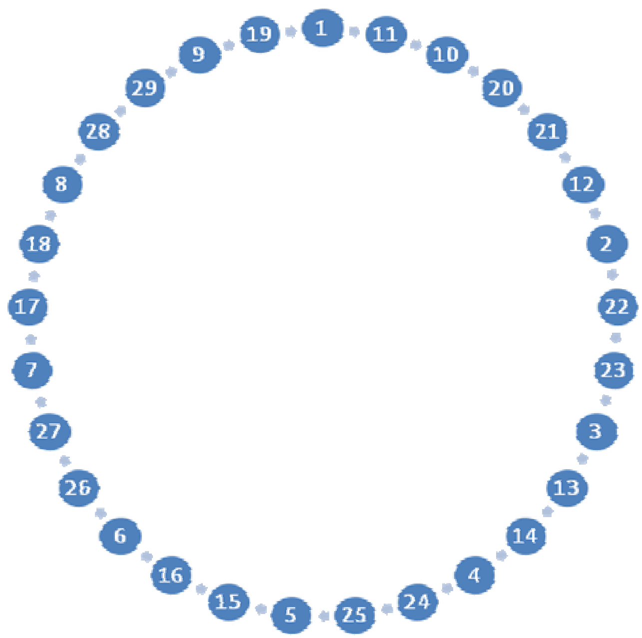
Prof. Adrian Burlan, Rm. Vâlcea

Rezolvare :

N>9 deoarece pentru numerele de o cifră cerinţa problemei nu este satisfăcută. Cele mai mici valori care pot fi scrise pe cerc ca vecini ai lui 9 sunt 19 şi 29.

Deci N≥ 29. ……………………………………………………………………………………**1,5p**

Pentru N=29 se poate configura astfel:



……………………………1,5p

Oficiu ………………………………………………………………………………...3p

www.mategl.com

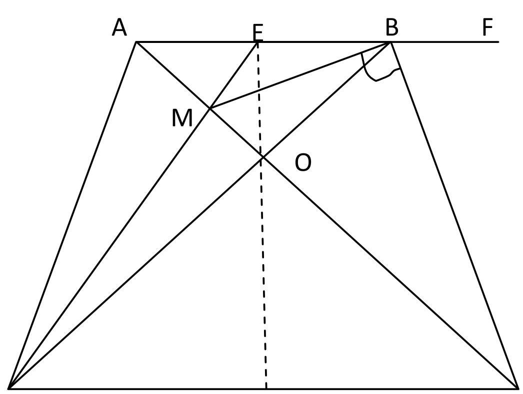
SUBIECTUL IV

În trapezul isoscel ABCD, baza mare [CD]este congruent cu diagonala [AC], iar $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $BM \perp BC$, $M \in [AC]$ şi $DM \cap [AB] = \{E\}$, demonstraţi că :

a) $\measuredangle ABM \equiv \measuredangle OBM$; b) $EO \perp DC$.

Prof. Leon Genoiu, Rm. Vâlcea

Rezolvare :



D C

Cum AC=BD=DC$\Longrightarrow \measuredangle DBC \equiv \measuredangle DCB$ ………………………………….. **1p**

$m(\measuredangle ABC)+m(\measuredangle BCD)=180^0 și\ m(\measuredangle MBC)=90^0\ rezultă\ m(\measuredangle ABM)+m(\measuredangle BCD)=90^0$

Cum $\measuredangle DBC \equiv \measuredangle DCB \Longrightarrow \measuredangle ABM \equiv \measuredangle OBM\ (complemente\ congruente)$ ………………**1p**

b)

Fie F$\in (AB, a.î.\ B \in [AF] \Longrightarrow \measuredangle FBC \equiv \measuredangle DCB(alt.int.) \Longrightarrow \measuredangle DBC \equiv \measuredangle CBF$ …………. **1p**

Cu teorema bis. Int şi Ext. $\Delta ABO \Longrightarrow \frac{MO}{MA}=\frac{CO}{CA}$ (rel. 1) …………………………………….. **1p**

Th. Menelaos în ΔABO şi transversal $\overline{E, M, D} \Longrightarrow \frac{DO}{DB}*\frac{EB}{EA}*\frac{MA}{MO}=1$ (rel. 2) ……………**0,5p**

DC∥AB $\Longrightarrow \frac{DO}{DB}=\frac{CO}{CA}$ (rel. 3) ……………………………………………………………..**0,5p**

Din (1) şi (3)$\Longrightarrow \frac{DO}{DB}=\frac{MO}{MA}$(rel. 4). Înlocuind (4) în (2) AE=EB ………………………….. **1p**

Cum ΔABO-isoscel $\Longrightarrow$EO⊥AB. Dar DC∥AB $\Longrightarrow$EO⊥CD **1p**

Oficiu …………………………………………………………………………………...3p