COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2011

CLASA a V-a

1. Ordonați crescător numerele $A = 3^{333} - 2\cdot 3^{332} - 2\cdot 3^{331} - 3^{330}$, $B = 2^{553} - 2^{552} - 2^{551}$, $C = 2\cdot 5^{220}$.

2. a) Determinați pătratele perfecte de forma $\overline{aabb}$, unde a și b sunt cifre în baza 10.

b) Prin împărțirea numerelor $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ la același număr natural n, se obțin câturile b, c, a și resturile c, a, respectiv b. Arătați că a = b = c.

3. Considerăm mulțimea $A = \{2^a \cdot 5^b \mid a, b \in \mathbb{N}, a \le 100, b \le 100\}$.

a) Câte elemente are A?

b) Câte numere din A se divid cu 10^3, dar nu se divid cu 10^4? Justificați răspunsul!

4. La o masă rotundă stau 2011 persoane având suma vârstelor egală cu 3^{11} ani. Arătați că, indiferent de ordinea lor la masă, există doi vecini cu suma vârstelor mai mare de 81 de ani.

Subiect elaborat de Ioana Galan

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2011

CLASA a VI-a

1. a) Fie fracția zecimală $x = \overline{51,853(abc)}$. Notăm cu a_n zecimala a n-a a numărului x. Știind că $a_{2011} = 7, a_{2010} = 6$ și $a_{1007} = 2$, determinați numărul x.

b) Determinați numărul natural n astfel încât fracția $\dfrac{4n+3}{2n-1}$ să fie număr natural.

2. a) Considerăm numerele $x = 5\cdot 9^{2011}$ și $y = 8\cdot 9^{2009}$. Aflați restul împărțirii lui x la y.

b) Fie $a = \overline{xyz2010}$ și $b = \overline{2010xyz}$. Determinați numărul $\overline{xyz}$, știind că acesta este un divizor comun al numerelor a și b.

3. Fie segmentul [AB] și $M_1, M_2, ..., M_{10}$ mijloacele segmentelor $[AB], [M_1B], [M_2B], \ldots, [M_9B]$. Dacă AB = 1024 cm, calculați lungimea segmentului $[M_4M_9]$.

4. În interiorul unghiului $\sphericalangle MON$ se construiesc semidreptele [OA și [OB astfel încât $m(\sphericalangle MOA) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle AOB) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle AON) < m(\sphericalangle BON)$. Știind că măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle MOB$ și $\sphericalangle NOA$ este 70°, aflați $m(\sphericalangle MON)$.

Subiect elaborat de Valentina Blendea

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2011

CLASA a VII-a

1. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$. Notăm cu M, N şi P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB şi cu D piciorul înălțimii din A. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele D, M, N şi P este trapez isoscel.
Ce se întâmplă în cazul în care AB = AC?

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},...,\frac{1}{9900}\right\}$. Demonstrați că suma elementelor lui B nu poate fi număr natural, oricare ar fi submulțimea B a mulțimii A.

3. Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AB > BC$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează dreptele AD şi CD în punctele P, respectiv Q. Dacă DT este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PDQ$, unde $T \in PQ$, iar $CT \cap AD = \{M\}$ şi $AT \cap CD = \{S\}$, arătați că SQ = DM.

Gazeta Matematică (Supliment) 10/2010

4. Fie $A=\frac{(3x+y)(z-x)(2x+2y+z)(3y+3z-x)}{210}$, unde x, y şi z sunt numere întregi astfel încât $17x+5y-2z=0$. Demonstrați că A este număr natural pătrat perfect.

Subiect elaborat de Gabriel Popa

COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2011

CLASA a VIII-a

1. Să se arate că planul determinat de oricare trei din centrele de greutate ale triunghiurilor determinate de patru puncte necoplanare este paralel cu unul din planele determinate de trei dintre cele patru puncte.

2. Comparați numerele reale $x=\frac{\overline{777...75}}{\overline{777...78}}$ şi $y=\frac{\overline{888...85}}{\overline{888...89}}$, ştiind că fiecare dintre numerele de la numărător şi de la numitor are câte n cifre, $n > 2$.

3. Pe planul pătratului ABCD se construieşte perpendiculara SA, astfel încât $SA = AB = a$.
a) Arătați că $BD \perp SC$.
b) Calculați distanța dintre dreptele BD şi SC.
c) Dacă M este mijlocul laturii CD, determinați distanța de la punctul S la dreapta BM.

Gazeta Matematică 7-8-9/2010

4. Demonstrați că numărul $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ este irațional, oricare ar fi n natural nenul.

Subiect elaborat de Mihaela Neagu