

Subiect clasa a VII- a**Problema 1:**

- a) Să se demonstreze că $2013 + \sqrt{2013} < 2059$.
 b) Să rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2013 < x^2 < 2059$.
 c) Determinați numărul natural n astfel încât $\sqrt{2013 + \sqrt{2013 - n}}$ să fie număr întreg.

Problema 2:

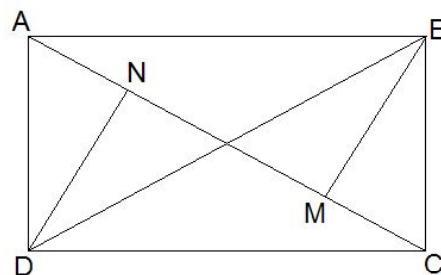
Se notează cu a numărul rațional $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ și se consideră un număr natural k , $k \neq 0$. Să se demonstreze că:

- a) $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$;
 b) $k(k+1) < (k+1)^2$;
 c) $|0,99 - a| < 1$.

Problema 3:

În dreptunghiul $ABCD$ din figura alăturată $AB \neq BC$, $BM \perp AC$, $DN \perp AC$, $BM = 2$ cm și $AC = 6$ cm.

- a) Să se calculeze aria dreptunghiului $ABCD$.
 b) Să se demonstreze că $BMDN$ este un paralelogram.
 c) Să se demonstreze că paralelogramul $BMDN$ nu poate fi romb.

**Problema 4:**

Se consideră pătratul $ABCD$ în care M este mijlocul laturii $[AB]$, iar N un punct pe latura $[AD]$ astfel ca $ND = 3 NA$. Să se arate că $[NM]$ este bisectoarea unghiului ANC .

Timp de lucru 3 ore. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiect clasa a VIII- a**Problema 1:**

- a) Dacă x este un număr real, arătați că $x^2 + 8 - 4\sqrt{2}|x| \geq 0$.
 b) Determinați numerele reale a și b care verifică relația $a^2 + b^2 + 24 \leq 8|a| + 4\sqrt{2}|b|$.

Problema 2:

Se consideră mulțimea de numere reale $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}\}$, unde

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = a_1(1 - \sqrt{a_1}), a_3 = a_2(1 - \sqrt{a_2}), \dots, a_{10} = a_9(1 - \sqrt{a_9}).$$

Demonstrați că:

- a) $a_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$; b) dacă $x \in M$, atunci $0 < x < 1$; c) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 < \frac{1}{2}$.

Problema 3:

Fie un triunghi dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este conținută într-un plan α ce formează cu planul triunghiului un unghi cu măsura de 45° . Determinați măsura unghiurilor formate de catetele triunghiului cu planul α .

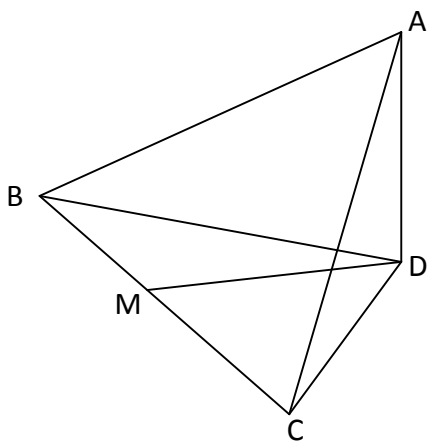
Problema 4:

Se consideră 9 puncte situate în interiorul sau pe suprafața unui cub cu latura de lungime 2 dm. Arătați că, pentru orice alegere a acestor puncte, există două situate la o distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{3}$ dm.

Barem de notare clasa a VII-a

Soluție problema 1	
a) Inegalitatea se scrie $2013 + \sqrt{2013} < 2059 \Leftrightarrow \sqrt{2013} < 46 \Leftrightarrow 2013 < 46^2 \Leftrightarrow 2013 < 2116$, evident.	1p
b) $2013 < x^2 < 2059 \Leftrightarrow \sqrt{2013} < x < \sqrt{2059}$.	1 p
Dar $44 < \sqrt{2013}$ și $\sqrt{2059} < 46$. Rezultă inegalitatea $44 < x < 46$. Cum $x \in \mathbb{N}$, rezultă $x = 45$ care verifică inegalitățile date.	1p
c) Notăm $\sqrt{2013 + \sqrt{2013 - n}} = p \Rightarrow 2013 + \sqrt{2013 - n} = p^2$	1p
Rezultă $2013 < p^2 < 2013 + \sqrt{2013} < 2059$. Conform punctului precedent $p = 45$	1p
Înlocuind rezultă $\sqrt{2013 + \sqrt{2013 - n}} = 45$, de unde se obține $\sqrt{2013 - n} = 12$	1p
Rezultă $n = 1869$.	1p
Total punctaj problema 1	7 p
Soluție problema 2	
a) Aducând la același numitor și eliminând numitorii, egalitatea se scrie astfel $(k+1) - k = 1$, iar aceasta este evidentă	1p
b) Împărțind prin $k+1 > 0$ inegalitatea se scrie $k < k+1$, iar aceasta este eidentă	1p
c) Din b) rezultă: $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$. Ținând cont de a) rezultă: $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.	1p 1p
Deci $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \dots \dots \dots \frac{1}{100^2} < \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ Adunând aceste inegalități rezultă $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{100^2} < 0,99$.	1p
Adunând 1 și scăzând 1 în membrul întâi, rezultă $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{100^2} - 1 < 0,99 \Rightarrow a - 1 < 0,99 \Rightarrow a - 0,99 < 1$	1p
Deoarece $a > 1$ rezultă $a - 0,99 > 0$. Atunci $a - 0,99 = a - 0,99 $. Cum $ a - 0,99 = 0,99 - a $, din ultima inegalitate rezultă concluzia.	1p
Total punctaj problema 2	7 p
Soluție problema 3	
a) Aria dreptunghiului $ABCD$ este de două ori aria triunghiului ABC .	1p
BM este înălțime în triunghiul ABC .	1p
Rezultă $A_{[ABC]} = \frac{BM \cdot AC}{2} = 6 \text{ cm}^2$, $A_{[ABCD]} = 12 \text{ cm}^2$.	1p
b) $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$, deci înălțimile lor sunt congruente, adică $BM = DN$.	1p
$BM \perp AC$ și $DN \perp AC \Rightarrow BM \parallel DN$. Prin urmare patrulaterul $BMDN$ este paralelogram (are două laturi opuse paralele și congruente).	1p
c) Presupunem, prin reducere la absurd, că paralelogramul $BMDN$ este un romb. Atunci $BD \perp AC$.	1p
Deoarece dreptunghiul $ABCD$ are diagonalele perpendiculare el este pătrat, adică $AB = BC$, ceea ce contrazice ipoteza.	1p
Total punctaj problema 3	7 p
Soluție problema 4	
$\triangle AMN \sim \triangle BCM$ (deoarece $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} = \frac{AN}{BM}$, iar triunghiurile sunt dreptunghice) $\Rightarrow \frac{MN}{CM} = \frac{1}{2}$	1p
Rezultă relațiile: $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle BCM$ $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle BMC$	1p 1p
$m(\sphericalangle ANM) + m(\sphericalangle AMN) = 90^\circ$	1p
Rezultă că triunghiul MNC este dreptunghic în M	1p
$\triangle MNC \sim \triangle ANM$ (deoarece $\frac{MN}{CM} = \frac{1}{2} = \frac{AN}{MA}$, iar triunghiurile sunt dreptunghice)	1p
Rezultă $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle ANM$, de unde concluzia.	1p
Total punctaj problema 4	7 p

Barem de notare clasa a VIII-a

Soluție problema 1		
a) $x^2 = x ^2$		1p
Rezultă $x^2 + 8 - 4\sqrt{2} x = (x - 2\sqrt{2})^2 \geq 0$		1p
b) Deoarece $a^2 = a ^2$ și $b^2 = b ^2$ inegalitatea din enunț se scrie $(a - 4)^2 + (b - 2\sqrt{2})^2 \leq 0$		2p
Cum termenii din membrul stâng sunt nenegativi, singura posibilitate este ca $ a - 4 = 0$ și $ b - 2\sqrt{2} = 0$		1p
$ a = 4 \Rightarrow a = \pm 4$ și $ b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{2}$		1p
$(a, b) \in \{(4, 2\sqrt{2}), (4, -2\sqrt{2}), (-4, 2\sqrt{2}), (-4, -2\sqrt{2})\}$		1p
Soluție problema 2		
a) $a_2 = a_1(1 - \sqrt{a_1}) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$		1p
b) Dacă $a_1 = \frac{1}{2}$, rezultă $0 < a_1 < 1$. Apoi $0 < a_1 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \sqrt{a_1} < 1 \Rightarrow 0 < a_1(1 - \sqrt{a_1}) < 1$, deci $0 < a_2 < 1$		1p
Din aproape în aproape rezultă $0 < a_3 < 1$, $0 < a_4 < 1, \dots, 0 < a_{10} < 1$, adică dacă $x \in M$, atunci $0 < x < 1$		1p
c) Fie un elemnt a_k din mulțimea M . Atunci $a_{k+1} = a_k(1 - \sqrt{a_k})$, pentru oricare $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$		1p
Rezultă $a_{k+1} = \frac{a_k(1 - a_k)}{1 + \sqrt{a_k}}$, de unde $a_{k+1}(1 + \sqrt{a_k}) = a_k(1 - a_k)$		1p
Rezultă $a_k^2 = a_k - a_{k+1} - a_{k+1}\sqrt{a_k} < a_k - a_{k+1} \Rightarrow a_k^2 < a_k - a_{k+1}$, deci:		1p
$a_1^2 < a_1 - a_2$ $a_2^2 < a_2 - a_3$ $a_9^2 < a_9 - a_{10} \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 < a_1 - a_{10} < a_1$, de unde concluzia.		1p
Soluție problema 3		
	În figura alăturată $AD \perp \alpha$ și M mijlocul ipotenuzei BC Rezultă $\sphericalangle((ABC), \alpha) = \sphericalangle AMD$	1p
	Considerând $AB = a$ obținem $BC = a\sqrt{2}$, de unde $BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	În $\triangle AMB$, dreptunghic în M , $\sphericalangle ABM = 45^\circ$, de unde $AM = BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	În $\triangle AMD$, dreptunghic în D , $\sphericalangle AMD = 45^\circ$, de unde $AD = DM = \frac{a}{2}$	1p
	În $\triangle ADC$, dreptunghic în D , $AC = a$ și $AD = \frac{a}{2}$, ceea ce implică $\sphericalangle ACD = 30^\circ$, relație echivalentă cu $\sphericalangle(AC, \alpha) = 30^\circ$	1p
	Congruența $\triangle ADC \equiv \triangle ADB$ asigură $\sphericalangle(AC, \alpha) = \sphericalangle(AB, \alpha) = 30^\circ$	1p
Soluție problema 4		
Reprezentarea unui cub prin desen.		1p
Considerând mijloacele laturilor cubului obținem 8 cuburi cu latura de lungime 1.		1p
Atunci din cele 9 puncte cel puțin două se află în interiorul sau pe suprafața unui cub cu latura de lungime 1.		2p
Distanța maximă dintre două puncte situate în interiorul sau pe suprafața unui cub este egală cu lungimea diagonalei cubului.		1p
Diagonala unui cub cu latura de lungime 1 are lungimea $\sqrt{3}$, ceea ce demonstrează cerința.		2p