

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI CĂLĂRAȘI
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 9 FEBRUARIE 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x+1] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{2x+3}{2}$.

Gheorghe Fianu, Perișoru

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{-2013; 2013\}$. Să se determine mulțimea numerelor naturale n pentru care este adevărată egalitatea $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$.

Lucian Ioniță, Călărași

Problema 2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ cu proprietatea $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2013$, demonstrați că $c^2(a+b) = 2013$.

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Problema 3. Fie $a > 0$ și piramida patrulateră regulată $SABCD$ în care muchia bazei are lungimea a și lungimea înălțimii piramidei este $2a$. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ și măsura unghiului dintre dreapta SB și planul (SAC) este α , aflați:

- a) distanța de la punctul S la dreapta DM ;
- b) lungimea proiecției segmentului $[SM]$ pe dreapta SD ;
- c) $\operatorname{tg} \alpha$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Problema 4. Dacă $[ABCD; A_1B_1C_1D_1]$ este un paralelipiped dreptunghic, O centrul feței $ABCD$, Q centrul feței ADD_1A_1 , α măsura unghiului dintre planele (DA_1C_1) și (DA_1B) atunci:

- a) Demonstrați că paralelipipedul dreptunghic este cub dacă și numai dacă $QC_1 \perp DA_1$ și $OA_1 \perp BD$.
- b) Dacă $[ABCD; A_1B_1C_1D_1]$ este cub calculați $\sin \alpha$.

Gheorghe Fianu, Perișoru

SUCCESE!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; Problema 2. 7 puncte; Problema 3. a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte; Problema 4. a) 4 puncte; b) 3 puncte.

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x+1] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = \frac{2x+3}{2}$.

a) Ecuația $\Leftrightarrow [2x] = \frac{2x+1}{2}$ 1p

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{2} \leq 2x < \frac{2x+3}{2} \\ \frac{2x+1}{2} = k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < \frac{3}{2} \\ x = \frac{2k-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ x = \frac{2k-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{2k-1}{2} < \frac{3}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k=1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 3p$$

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{-2013; 2013\}$, să se determine mulțimea numerelor naturale n pentru care este adevărată egalitatea $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$.

Soluție : condiție necesară $n = 2p, p \in \mathbb{N}$ 1p

p termeni din sumă sunt egali cu -2012 și p termeni sunt egali cu 2012 implică

$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot x_3x_4 \cdot \dots \cdot x_{n-1}x_n \cdot x_nx_1 = (-1)^p \cdot 2012^{2n}$$

$$\Rightarrow x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot \dots \cdot x_n^2 = (-1)^p \cdot 2012^{2n} > 0. \text{ Deci } p = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 4k \in \mathbb{N}. \text{ Rezulta } n \in M_4 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq b$ cu proprietatea $a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2013$ atunci demonstrați că $c^2(a+b) = 2013$.

Soluție

$$a^2(b+c) = b^2(a+c) = 2013 \Rightarrow a^2(b+c) - b^2(c+a) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow a^2b + a^2c - b^2c - b^2a = 0 \Leftrightarrow ab(a-b) + c(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow ab(a-b) + c(a+b)(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(ab + ac + bc) = 0 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0. \dots\dots\dots 3p$$

$$a(b+c) = -bc \Leftrightarrow a^2(b+c) = -abc.$$

$$c(a+b) = -ab \Leftrightarrow c^2(a+b) = -abc \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3. Fie $a > 0$ și piramida patrulateră regulată $SABCD$ în care muchia bazei are lungimea a și lungimea înălțimii piramidei este $2a$. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$ și măsura unghiului dintre dreapta SB și planul (SAC) este α , aflați:

- distanța de la punctul S la dreapta DM ;
- lungimea proiecției segmentului $[SM]$ pe dreapta SD ;
- $\text{tg} \alpha$.

Soluție

Desen 1p

a) $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ 1p

$$ON \perp DM \text{ și din aria triunghiului } \triangle DOM \text{ scrisă în două moduri } \Rightarrow ON = \frac{a\sqrt{5}}{10} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din teorema celor trei perpendiculare } \Rightarrow SN \perp DM \text{ și } d(S, DM) = \frac{9a\sqrt{5}}{10} \dots\dots\dots 1p$$

b) $DS = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ și $MT \perp SD, T \in (SD) \Rightarrow MT = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ 1p

$$MS = \frac{a\sqrt{17}}{2} \text{ și } ST = \frac{5a\sqrt{2}}{4} \dots\dots\dots 1p$$

c) Dacă proiecția segmentului $[SB]$ pe planul (SAC) este segmentul $[OB]$ unde $\{O\} = AC \cap BD$ rezultă că $\alpha = m(\angle OSB)$1p

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OB}{SO} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Problema 4. Dacă $[ABCD; A_1B_1C_1D_1]$ este un paralelipiped dreptunghic, O centrul feței $ABCD$, Q centrul feței ADD_1A_1 , α măsura unghiului dintre planele (DA_1C_1) și (DA_1B) atunci:

a) Demonstrați că paralelipipedul dreptunghic este cub dacă și numai dacă $QC_1 \perp DA_1$ și $OA_1 \perp BD$.

b) Dacă $[ABCD; A_1B_1C_1D_1]$ este cub calculați $\sin \alpha$.

a) Fie $AB = a$; $BC = b$; $AA_1 = c$;

În $\triangle DA_1C_1$, în care $[C_1Q]$ este și mediană și înălțime, avem $[C_1D] \equiv [C_1A_1] \Rightarrow a^2 + c^2 = a^2 + b^2$;
 $\Rightarrow b^2 = c^2$; $\Rightarrow b = c$; (1)2p

În $\triangle DA_1B$, în care $[A_1O]$ este și mediană și înălțime, avem $[A_1D] \equiv [BA_1] \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + c^2$;
 $\Rightarrow b^2 = a^2$; $\Rightarrow b = a$; (2).....1p

Din (1) și (2) avem $a = b = c$ 1p

b) Desen.....1p

Dacă $[ABCD; A_1B_1C_1D_1]$, este cub, $AB = a$

Unghiul plan corespunzător diedrului $(DA_1C_1; DA_1B)$ este $\angle (C_1QB)$

Fie $\triangle C_1QB$ isoscel de bază BC_1 ; $BC_1 = a\sqrt{2}$; $BQ = QC_1 = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (ca înălțime într-un tr.echilateral).....1p

$$A(C_1QB) = \frac{BC_1 \cdot QQ'}{2} = \frac{QC_1 \cdot QB \cdot \sin BQC_1}{2} \quad \sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \dots\dots\dots 1p$$

