Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2010

EDIŢIA a VII-a SLATINA – 3 decembrie 2010

Clasa a IV-a

1. Se consideră suma $4 + 6 + 8 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 32 + 34 + 36$.

a) Calculaţi suma, eventual grupând convenabil termenii.

b) Dacă înlocuim două semne „+” cu semne „−” se obţine rezultatul 118. În faţa căror numere din sumă s-a pus semnul „−”?

2. Bunicul şi-a propus să-şi împrejmuiască cu 5 rânduri de sârmă o grădină de formă dreptunghiulară cu dimensiunile de 65 m şi 30 m. Cu câţi metri va trebui să micşoreze lungimea grădinii, pentru a-i ajunge sârma, dacă bunicul avea doar 850 m de sârmă?

3. Determinaţi numerele naturale de 5 cifre distincte, ştiind că diferenţa oricăror două cifre alăturate este 2.

4. O carte *ciudată* este o carte în care toate paginile sunt numerotate cu numere formate numai din cifre impare. Aflaţi ce număr se află pe a 50-a pagină a unei cărţi *ciudate*.

Clasa a V-a

1. Suma a 5 numere naturale diferite este 12. Determinaţi suma pătratelor numerelor.

Marius Perianu

2. Unsprezece numere naturale dau la împărţirea cu 20 resturi diferite. Suma tuturor resturilor obţinute este mai mare decât 113. Arătaţi că cel puţin unul dintre resturi este număr prim.

M.A. Fianu

3. Determinaţi numerele de forma $\overline{abcd}$, cu cifre nenule, care verifică relaţia

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d + 1 = \overline{dcba}.$$

Costel Anghel

4. Fie $p \geq 3$ un număr prim şi $k \geq 1$ un număr natural. Determinaţi în câte moduri poate fi scris numărul p^k ca sumă de cel puţin două numere naturale consecutive.

Vasile Pop

Clasa a VI-a

1. Fie a şi b două numere naturale nenule astfel încât $a + 2^b = b + 2^a$. Arătaţi că $a = b$.

Florian Dumitrel

2. Determinaţi cel mai mare număr natural de patru cifre care împărţit la 3 dă restul 1, împărţit la 5 dă restul 2 şi împărţit la 7 dă restul 3.

Florian Dumitrel

3. Fie $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi toate numerele naturale p pentru care

$$(n, n+6) + (n+1, n+7) + ... + (n+p, n+p+6) = 2010,$$

Maria Pop

unde (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

4. Fiecărui număr natural nenul n i se asociază un număr natural notat a_n, astfel încât să fie verificate simultan condiţiile:

a) $a_{mn} = a_m + a_n$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $a_n = 0$ pentru orice număr natural care are ultima cifră 9.

Dacă p este un număr natural prim cu 10, arătaţi că $a_p = 0$.

Marius Perianu

Clasa a VII-a

1. Arătaţi că 2010 nu se poate scrie ca suma pătratelor a cel puţin două numere prime, impare şi distincte.

Florian Dumitrel

2. Determinaţi cel mai mare număr natural n cu proprietatea că, scriind numerele 1, 2, ..., 2010 în orice ordine, există 15 termeni consecutivi cu suma cel puţin egală cu n.

Marius Perianu

3. Determinaţi soluţiile naturale ale ecuaţiei $3^x \cdot 5^y + 4 = 7^z$.

Mihai Bălună

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\widehat{BAC}) = 110°$. În interiorul triunghiului se consideră punctul D astfel încât $m(\widehat{ABD}) = 5°$ şi $m(\widehat{ACD}) = 10°$. Determinaţi măsura unghiului $\widehat{ADC}$.

Costel Anghel

Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele reale x, y astfel încât $x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1$ şi $\sqrt{x+y} = x^2 - y$.

$(***)$

2. Se consideră şirul de fracţii

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1}; \dots; \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \dots, \frac{n}{1}, \dots$$

Notăm cu a_n poziţia pe care apare a $n-a$ oară în şir numărul raţional $\dfrac{1}{2}$; spre exemplu $a_1 = 2$, $a_2 = 11$ etc. Determinaţi a_{2010}.

Marius Perianu

3. Fie ABC un triunghi şi $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$, $C' \in (AB)$ punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Arătaţi că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă $\dfrac{1}{AA'} + \dfrac{1}{BB'} + \dfrac{1}{CC'} = \dfrac{1}{r}$, unde r este raza cercului înscris.

Florian Dumitrel

4. Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care cmmmc $[1, 2, ..., n-1] =$ cmmmc $[1, 2, ..., n]$.

O.T.V.