BAREME clasa a IV-a 2010

1.

a) a=24……………………………………2p

b) $c = b+a$……………………………………1p

b=2a……………………………………1p

11(a+b+c)=132……………………………………1p

$\overline{abc}$ =246……………………………………2p

2.

Numărul căutat este de forma $\overline{abcde}$.
Dacă a < 3 $\Rightarrow$ a poate lua valorile 1 sau 2. 1 punct

Pentru a = 1 $\Rightarrow$b =6 , c = 3 şi d = 7. Numărul devine $\overline{1637e}$ 1 punct

Suma cifrelor este (17 + e) şi este număr impar pentru e cifră pară , e > 5 1 punct
Numerele obţinute sunt : 16376 şi 16378 1 punct

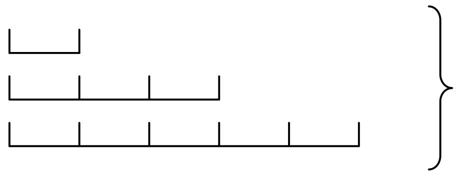
Pentru a = 2 $\Rightarrow$b =7 , c = 6 şi d = 8. Numărul devine $\overline{2768e}$ 1 punct

Suma cifrelor este (23 + e) şi este număr impar pentru e cifră pară, e > 5 1 punct
Numerele obţinute sunt : 27686 şi 27688 1 punct

3. Rezolvări şi bareme:

a) ***(5x 0,6p)***
328 – 168 = 160 locuri au 4 vagoane de clasa a II-a
160 : 4 = 40 locuri are un vagon de clasa a II-a
40 x 3 = 120 locuri au 3 vagoane de clasa a II-a
168 – 120 = 48 locuri au 2 vagoane de clasa I
48 x 5 = 240 locuri au 10 vagoane de clasa I

b)
Nr. copii
Nr. femei
Nr. bărbaţi



90 călători ***(1,5 p)***

o parte reprezintă: 90 : 9 = 10 călători ***(1 p)***

$\Rightarrow$ 10 copii ***(0,5 p)***
3 x 10 = 30 femei ***(0,5 p)***
5 x 10 = 50 bărbaţi ***(0,5 p)***

4.

Cifrele folosite sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ………………………. **1p**

Prima este 0, iar ultima 1 ………………………………….. **1p**

Cel mai mic număr de trei cifre diferite este 102, suma cifrelor numărului 102 este 3 …………**1p**

A doua cifră este 7 ……………………………………..**1p**

Penultima este 9 sau 5 ………………………………………………..**1p**

Caz I Penultima cifră este 9, numărul este 0786543291 ……………...**1p**

Caz II Penultima cifră este 5, numărul este 0798643251 ……………...**1p**

BAREME clasa a V-a 2010

1. a) Presupunem că nici un elev nu a rezolvat toate cele 4 probleme. Dacă fiecare a rezolvat cel mult trei, atunci cei 25 de elevi au rezolvat în total 25*3 = 75 de probleme. (**1 punct**)

Dar numărul total de probleme rezolvat de de cei 25 de elevi este de 16+22+18+23 = 79 probleme (**1 punct**)

Avem un plus de 4 probleme rezolvate, de unde rezultă că cel puţin 4 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme. (**1 punct**)

b) Suntem tentaţi să aflăm masa totală şi să o împărţim la numărul bărcilor, astfel obţinem rezultatul: 666+668+.....+794= 666+ (666+2)+ (666+4) +....+(666+128)=666*65+2(1+2+...+64)= 43290+ 4160 = 47450 Kg . Dacă împărţim 47450Kg la 8 =5931,25Kg, mai puţin de 6000Kg cât este capacitatea unei bărci. Răspunsul este greşit deoarece blocurile nu pot fi împărţite în părţi mai mici, ele trebuie transportate întregi. (**1 punct**)

Încercăm să judecăm altfel.

Dacă punem cel cel mult 8 blocuri piatră într-o barcă, atunci în total vom putea transporta cel mult 8*8=64 blocuri piatră, dar cum sunt 65 de blocuri, suntem obligaţi ca într-o barcă să punem exact 9 blocuri de granit (**1 punct**)

Presupunem că le alegem pe cele 9 cele mai uşoare,astfel ele vor cântări: 666+668+670+...+682 = 666*9+2(1+2+...+8) = 6066 Kg (**1 punct**)

Această greutate depăşeşte cu 66 Kg capacitatea maximă admisă a unei bărci, în consecinţă nu se pot transporta cele 65 de blocuri de granit cu 8 bărci. (**1 punct**)

2.

$n = 0$ ……………………………………………………………2p

a) $x = 2$ ……………………………………………………………2p

b) $x = 2^{2007}$ ……………………………………………………1p

$y = 3^{1338}$ …… ………………………………………………………..1p

$x = 2^{2007} = \left(2^3\right)^{669} = 8^{669}$ şi $y = 3^{1338} = \left(3^2\right)^{669} = 9^{669}$, deci x < y ……..1p

3. a) $\overline{ab8} = \overline{ba} \cdot 19 + 35$,

$\overline{ba} > 35$ ……………………………………………………………………………1p

$100a + 10b + 8 = 19 \cdot (10b + a) + 35$ ……………………………………………………1p

obţinem $81a = 180b + 27 \quad \Leftrightarrow \quad 9a = 20b + 3$ ……………………………………1p

$U(20b + 3) = 3$

atunci $a = 7$ si $b = 3$, deci numarul este 738………………………………………1p

b) Numerele sunt: 201, 202, …, 699, in total 499 numere

Resturile sunt 0, 1, 2, …36, in total 37 de numere…………………………………………1p

201 : 37 =5 rest 16, deci resturile sunt : 16, 17, …, 36, 0, 1, 2, …, 36, 0, 1, 2……

In prima grupa sunt 21 de resturi,

499 – 21 = 478

478 : 37 = 12 rest 34, deci avem 12 grupe complete si inca una cu 34 de resturi ………1p

suma resturilor este

(16 + 17 + … + 36) + (0 + 1 + 2 + … + 36) + …(0 + 1 + 2 + … + 36) + … + (0 + 1 + 2 +… + 33) = 546 + 12 · 666 + 561 = 9099……………………………………………1p

4. a Jumătatea numărului 114 este 114 :2 =57 ……… **0.5p**

Două treimi din 57 este 57 : 3 *2 = 19 *2 = 38 ………….. **0.5p**

Jumătatea treimii numărului ***x*** este 38, deci treimea numărului ***x*** este 38 *2 = 76 ……………….…**0.5p**

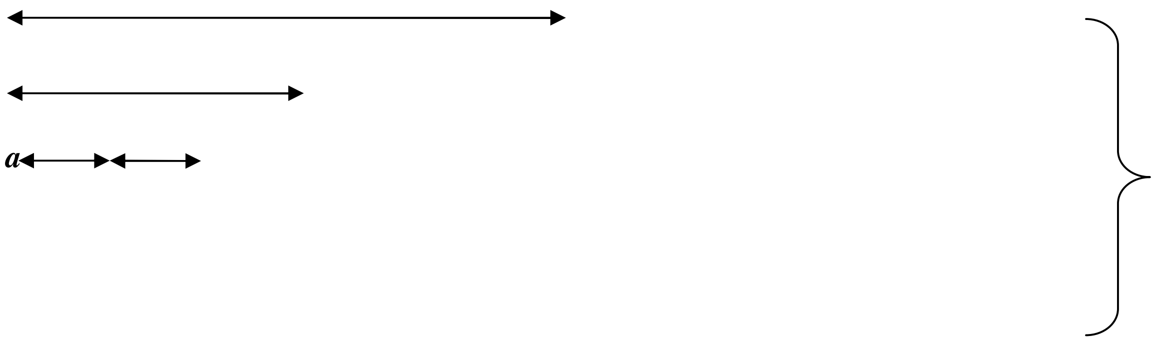
Numărul ***x*** este 76 * 3 = 228 …………………..**0.5p**

b Reprezentare grafică sau scriere algebrică ……………….**2p**

Primul număr ***a***

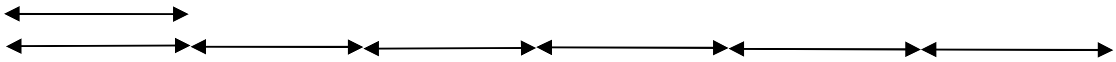
Jumătatea lui ***a***

Două treimi din jumatate ***a***



6030

Jumătatea treimii lui ***b***
Al doilea număr ***b***



18 părți = 6030
1 parte = 6030 : 18
1 parte = 335
a **=** 335 *6
a **=**2010……………………………………………………………………………………**2p**
b **=** 335 *12
b **=** 4020……..……………………………………………………………………………**1p**

BAREME clasa a VI-a 2010

1.

a) $n = 1 \Rightarrow [1, 4] = 4$ **(0,5p)**
$n = 2 \Rightarrow [2, 5] = 10$ **(0,5p)**
$n = 3 \Rightarrow [3, 6] = 6$ **(0,5p)**
$n = 4 \Rightarrow [4, 7] = 28$ **(0,5p)**
$n = 5 \Rightarrow [5, 8] = 40$ nu convine **(0,25p)**
$n = 6 \Rightarrow [6, 9] = 18$ **(0,5p)**
$n = 7 \Rightarrow [7, 10] = 70$ nu convine **(0,25p)**
$n = 8 \Rightarrow [8, 11] = 88$ nu convine **(0,25p)**
$n = 9 \Rightarrow [9, 12] = 36$ **(0,5p)**
Deci, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. **(0,25p).**

b) Fie $d \mid 3n + 11$ şi $d \mid 4n + 15$ **(0,5p)**
Atunci $d \mid 4\cdot(3n + 11) \Rightarrow d \mid 12n + 44$ **(0,5p)**
$d \mid 3\cdot(4n + 15) \Rightarrow d \mid 12n + 45$ **(0,5p)**
Din ultimele două relaţii rezultă că $d \mid (12n + 45) - (12n + 44)$
$\Rightarrow d \mid 1$ **(1p).**
Deci 3n+11 şi 4n+15 sunt prime între ele **(0,5p)**

2.

a).Calculând, obţinem: $a = \frac{10x+3y}{60}$ şi $b = \frac{2x+5y}{60}$ **1p**

Dacă a = b, rezultă 10x + 3y = 2x + 5y, de unde obţinem y = 4x **1p**

b).Dacă y = 4x, atunci obţinem $a = \frac{10x+12x}{60} = \frac{11x}{30}$ şi

$b = \frac{2x+20x}{60} = \frac{11x}{30}$ **1p**

Dacă a=b şi atunci $\frac{3a+7b}{2a+3b} = \frac{3a+7a}{2a+3a} = \frac{10a}{5a} = 2$ **1p**

c).Numerele a şi b se pot pune sub forma:

$a = \frac{7}{30}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{28}{30}\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$ şi $b = \frac{28}{30}\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{30}\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$

Se observă că aceste numere se obţin din a), pentru x = $\frac{7}{30}$ şi y = $\frac{28}{30}$, iar y = 4x.

Deci conform punctului a), rezultă a = b. **3p**

Orice altă rezolvare, prin calcul direct, este acceptată. De ex. a=b=$\frac{77}{900}$=0,08(5)

3.

a) 5 puncte coliniare , o dreaptă; 4 puncte coliniare, 5 drepte; 3 puncte coliniare, 6 sau 8 drepte; oricare 3 puncte necoliniare, 4+3+2+1 = 10 drepte (0.5 X 4 = 2 puncte)

b) aranjăm punctele pe laturile un triunghi, 3 puncte în cele 3 vârfuri ale triunghiului, 3 puncte pe cele 3 laturi (1 punct)

c) 9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45 de drepte (2 puncte)

d) desenăm o stea cu 5 colţuri, trasând 5 segmente fără a ridica creionul de pe hârtrie, în fiecare colţ câte un punct , la intersecţia oricăror 2 segmente câte un punct. (2 puncte)

4. Desen …………………………………………………………………………… 1p

$M_1B = \frac{m+1}{2}$, $M_2B = \frac{m+1}{2^2}$, …, $M_8B = \frac{m+1}{2^8}$ …………………………………...1,5p

$BN_1 = \frac{n-m-1}{2}$, $BN_2 = \frac{n-m-1}{2^2}$, …, $BN_8 = \frac{n-m-1}{2^8}$ ………………………….1,5p

$M_8N_8 = 16 \Leftrightarrow n = 2^{12}$ ……………………………………………………..2p

$m \in D_{2^{12}} = \{1;2;2^2;2^3;...;2^{12}\}$…………………………………………………….1p

BAREME clasa a VII-a 2010

1.

a) Dacă $|a| = 10 \Rightarrow a \in \{-10;10\}$ 1 punct

Dacă $|b| = 5 \Rightarrow b \in \{-5;5\}$ 1 punct

Din verificarea condiţiei $|a-b| = 15$ se obţin soluţiile

(a;b) ∈ {(-5;10);(5;-10)} 1 punct

1 punct

b) Deoarece $5y \vdots 5$ şi $15 \vdots 5 \Rightarrow 3x \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 5$.

Pentru că $|x| < 6$ şi x∈ M_5 se obţine $x \in \{-5; 0; 5\}$ 1 punct

Prin înlocuirea lui x în relaţia 3 x + 5 y = 15 se obţin soluţiile:

$(x; y) \in \{(-5;6); (0;3); (5;0)\}$ 2 puncte

2. a)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ \ldots \\ a_{2005} = 1+\frac{1}{2005}=\frac{2006}{2005} \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (1p)$$

$$\frac{2005}{2006} > \frac{2006}{2005} \qquad \ldots\ldots\ldots(1p)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{n+1}{n} \\ \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}=\frac{n+3}{n}=1+\frac{3}{n} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1p)$$

$n \in \{1,3\}$ ……………………………………………(1p)

c) $$7\cdot\left[\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(n-2)\cdot n}\right]=\frac{2001}{4016}$$

$$\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2001}{4016}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1p)$$

$$\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2001}{4016}$$

$$\frac{7}{2}\cdot\frac{n-7}{7n}=\frac{2001}{4016}$$

$$\frac{n-7}{2n}=\frac{2001}{4016} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (1p)$$

$$\frac{n-7}{n}=\frac{2001}{2008} \qquad \ldots.. n=2008 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1p)$$

3.

a)I $\in$ bisectoarei NC $\Rightarrow$ d(I,BC)=d(I,AC)..1 p
I $\in$ bisectoarei BM $\Rightarrow$ d(I,BC)=d(I,AB) ....1 p
$\Rightarrow$ d(I,AC)=d(I,AB) $\Rightarrow$I $\in$ bisectoarei $\sphericalangle$BAC..1 p

b)Construim [BJ bisectoarea $\sphericalangle$ABC) şi [CJ bisectoarea $\sphericalangle$ACB, J $\in$ int. Δ ABC şi deducem AP $\perp$ BJ AQ $\perp$ CJ

Dacă L e mijlocul segmentului AB$\Rightarrow$ M,L,P coliniare..............................1 p

$\sphericalangle$LPB $\equiv$ $\sphericalangle$PBC $\Rightarrow$ MP $\parallel$ BC (1)

Dacă K e mijlocul segmentului AC $\Rightarrow$ N,K,Q coliniare

$\sphericalangle$KQC $\equiv$ $\sphericalangle$QCB $\Rightarrow$ QN $\parallel$ BC (2)

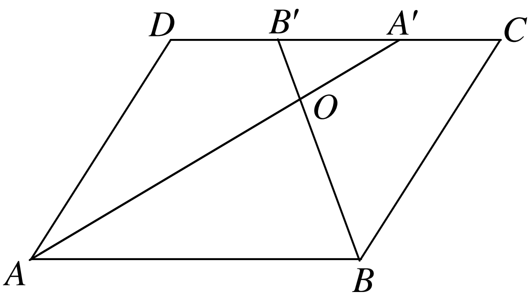
LK linie mijlocie $\Rightarrow$ LK $\parallel$ BC (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow$ M,L,K,N coliniare şi MN ∥ BC ....1 p

c)MN=ML+LK+KN=$\frac{AB}{2}+\frac{BC}{2}+\frac{CA}{2}$=p……………………………………….2 p

4.Barem:

a) Figura ... **1p**



[AA′ bisect $\Rightarrow$ ∢DAA′ ≡ ∢A′AB

Dar ∢DA′A ≡ ∢A′AB (a.i.)

$\Rightarrow$∢DAA′≡ DA′A

$\Rightarrow$ΔDAA′ isoscel

$\Rightarrow$AD= DA′=$\frac{2}{3}$DC=6cm

$\Rightarrow P_{ABCD} = 30cm$ **(1p)**

b)Notăm m(∢A′AD)=m(∢A′AB)=a m(∢ABB′)=m(∢B′BC)=b

Cum m(∢A)+m(∢B)=180° $\Rightarrow$2a + 2b = 180° $\Rightarrow$ m(∢AOB)=180°-(a+b)=90°

Deci AA′ ⊥ BB′ **(1p)**

c)Ducem înălţimea [CM], M∈ BB′ $\Rightarrow$[CM] mediană

$\Rightarrow$[OA′] l.m. în ΔCMB′

Dacă aria ΔB′OA′ este x atunci B′O . OA′ =2x

Aria ΔB′MC=4x

Aria ΔB′BC=8x **(1p)**

Analog calculăm aria Δ ADA′ = 8x

Cum BB′ = 2.B′M=4B′O $\Rightarrow$ OB=3OB′ analog OA=3OA′

$A_{\Delta AOB} = \frac{AO \cdot OB}{2} = 9x$

$A_{ABCD} = 16x$ cm² **(1p)**

BAREME clasa a VIII-a 2010

1.

a) $\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{15}}+\frac{5}{2\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{8}}+\frac{4}{\sqrt{15}}+\frac{5}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{24}}>1+1+1=3$ ………...1p

b) Raţionalizând numitorii nr. x şi z obţinem

$x=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ şi $z=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ ………0,5p

Înmulţim pe x, y şi z cu $\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n(n+1)}-n<\frac{1}{2}<n-\sqrt{(n-1)n}$,

adevărată conform inegalităţii mediilor…………………………….........1p

Astfel că, obţinem: $x < y < z$, orice n∈ **N***…………………………….....0,5p

c) Folosim dubla inegalitate demonstrată la punctul b):

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$ ……………………….1p

Pentru $n=\overline{1,2010}$ obţinem: $\sqrt{2}-\sqrt{1} < \frac{1}{2} < \sqrt{1}$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} < \frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2}-\sqrt{1}$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{3} < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

…………………………..

$$\sqrt{2011}-\sqrt{2010} < \frac{1}{2\sqrt{2010}} < \sqrt{2010}-\sqrt{2009}$$ ………………………..1p

Însumând relaţiile anterioare obţinem:

$$\sqrt{2011}-1 < \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{2\sqrt{2010}} < \sqrt{2010}$$ ………………...1p

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{2011}-1\right) < a < 2\sqrt{2010}$$

$\Rightarrow [a]=88$ ………………………………………………………….1p

2. a) x(x+1)=x²+11x

(x+5)(x+6)=x²+11x+30 ……..……………………1p

x²+11x=t

t(t+30)+225=(t+15)² ………………………………..1p
x(x+5)(x+6)(x+11)+225=(x²+11x+15)² ………..… 1p

b) Ridicare la pătrat şi împărţire cu 2 ……………...1p

substituţie $\frac{x+2010}{x-2010}=a$

ecuaţia devine $a^2-2=-\frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a^4-2a^2+1=0 \Leftrightarrow (a^2-1)^2=0$ …….1p

a∈ {-1;1}

din $\frac{x+2010}{x-2010}$ = -1 ⇒x=0 …… .1p

din $\frac{x+2010}{x-2010}$ = 1 ⇒x∈ ∅ …….1p

3. a). Notăm cu *M* şi *N* punctele de tangenţă dintre cercul înscris în triunghiul *ADB* şi laturile *AD*, respectiv *AB*. Desigur, AMO_1N este pătrat, având latura egală cu *r* , raza cercului înscris..**1p**

$AO_1 = r\sqrt{2}, O_1O_2 = 2r \Rightarrow AC = 2r + 2r\sqrt{2}$.

Cum $r = 1cm \Rightarrow AC = 2(1+\sqrt{2})cm \Rightarrow AB = 2+\sqrt{2}cm$ **1p**

b). $\Delta EAO_2 \equiv \Delta GCO_1 \Rightarrow EO_2 = EO_1$. Prelungim *AC* cu segmentul *AS*, unde

$AS = 2+\sqrt{2}cm \Rightarrow EGO_1S$ este paralelogram, deci $ES \parallel GO_1$ ....,,......**1p**

$SA = EA = AO_2 \Rightarrow \Delta SEO_2$ este dreptunghic, deci $SE \perp EO_2$;

$m[\angle(EO_2, GO_1)] = 90^0$ **1p**

c). *DBFP* este trapez; fie $PF \cap DB = \{L\}$.

În planul *BCG* trasăm $FQ \parallel GB, Q \in BC$

$\Delta DBC \equiv \Delta LBQ(LUL) \Rightarrow LQ = DC$ şi $LQ \parallel DC$ **1p**

$DC \perp (BFC) \Rightarrow LQ \perp (BFC), FQ \subset (BFC) \Rightarrow LQ \perp FQ$ **1p**

HBLF este paralelogram, deci $LF = DC\sqrt{3} \Rightarrow \sin(L\hat{F}Q) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **1p**

4. a) Din T. B. în Δ ABD $\Rightarrow \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DP}{AP} \Rightarrow \dfrac{DP}{AP} = \sqrt{2}$ (1)

Din T. B. în Δ DBE $\Rightarrow \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{DQ}{EQ} \Rightarrow \dfrac{DQ}{DE} = \sqrt{2}$ (2) ………**1p**

Din (1) şi (2) $\overset{tranz}{\Rightarrow} \dfrac{DP}{AP} = \dfrac{DQ}{EQ} \overset{R.T.T.}{\Rightarrow}$ PQ ‖ AE

cum AE ⊂ (ABE) ⇒PQ ‖ (ABE) ……..**1p**

b)motivare d(PQ,AE)=AP ………**1p**

Din AD=12 cm şi $\dfrac{DP}{AP} = \sqrt{2}$ se află AP=$12(\sqrt{2}-1)cm$ ……….**1p**

c)construire pătrat ABCD şi romb ABEF în acelaşi plan

BC∩FE={R} şi definire drum minim FC ……….**1p**

Luăm Δ FRC dreptunghic în R BR=6$\sqrt{3}$ cm ER=6 cm

CR=(12+6$\sqrt{3}$) cm FR=18 cm ………**1p**

Prin T.P. se află FC=$12\sqrt{4+\sqrt{3}}$ cm ≅ 28,8*cm* ……..**1p**