

**Concursul interjudețean de matematică
”Traian Lalescu”, Ediția a XXV-a,
Reșița, 25-27 martie 2011**

Clasa a V-a

1. Aflați suma tuturor cifrelor care apar în scrierea numerelor 1, 2, 3, ..., $10^n - 1$.
2. Arătați că nu există niciun număr natural care să se mărească de 7 sau de 9 ori prin mutarea primei cifre la sfârșit.
3. Arătați că, oricum am alege 7 numere naturale nenule distincte mai mici sau egale cu 126, printre ele se vor afla două astfel încât cel mai mare dintre ele să fie mai mic sau egal cu dublul celui mai mic.

Clasa a VI-a

1. Arătați că nu există nici un număr natural care să se mărească de 2, 5, 6 sau 8 ori prin mutarea primei cifre la sfârșitul numărului.
2. a) Determinați numerele strict pozitive a și b astfel încât

$$a^n + b^n = a^{n+1} + b^{n+1} = a^{n+2} + b^{n+2},$$

pentru un număr natural $n \geq 2$ fixat.

- b) Dacă a , b și c sunt numere naturale avându-l pe 1 drept cel mai mare divizor comun și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, arătați că $a + b$, $a - c$ și $b - c$ sunt pătrate perfecte.
3. Fie \widehat{POQ} un unghi ascuțit și $B \in (OQ)$. Construim din B o perpendiculară pe OP care intersectează această dreaptă în A . Punctul C este ales astfel încât triunghiul ABC să fie echilateral, iar O și C să nu fie de aceeași parte a dreptei AB . Fie D simetricul lui C față de OP și $M \in (OQ)$ astfel încât $[OC] \equiv [OM]$. Știind că $m(\widehat{POC}) = \frac{1}{3}m(\widehat{POQ})$,
 - a) arătați că $[AD] \equiv [CM]$;
 - b) calculați $m(\widehat{POQ})$.
4. Un gardian deschide pe rând toate celulele unei închisori, care sunt așezate în linie dreaptă. Apoi, el închide celulele cu numărul 2, 4, 6 ș. a. m. d. După aceea, luând celulele din 3 în 3, răsuște cheia în broasca acestor celule, închizându-le pe cele deschise și deschizându-le pe cele închise. El continuă în acest fel, la pasul i luând celulele i , $2i$, $3i$, ..., și răsucind cheia în broasca lor. Deținuții ale căror celule au rămas deschise după efectuarea tuturor operațiilor posibile de acest fel sunt puși în libertate.

Să se arate că deținuții eliberați vor fi cei din celulele având numărul de ordine un pătrat perfect. (Fiecare operație începe din dreptul primei celule.)