

Concursul interjudețean de matematică  
”Traian Lalescu”, Ediția a XXV-a,  
Reșița, 25-27 martie 2011

Clasa a VII-a

1. Arătați că numărul  $\sqrt{26} + \sqrt{3} + \sqrt{2011}$  este irațional.
2. Fie  $\triangle ABC$  un triunghi ascuțitunghic,  $I$  centrul cercului său înscris, iar  $R \in (BC)$  un punct cu proprietatea că  $\widehat{ARB} \equiv \widehat{IRC}$ . Arătați că

$$AR \cdot BC = IR \cdot (AB + AC + BC).$$

3. a) Arătați că ecuația  $x^2 + y^2 = 2011$  nu admite soluții în mulțimea numerelor întregi.  
b) Care dintre ecuațiile  $x^2 + 2011^2 = y^2$  și  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}$  are mai multe soluții în mulțimea numerelor întregi? Justificați.

4. Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , iar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  puncte în plan, necoliniare câte trei. Unele dintre puncte sunt unite prin segmente. Notăm cu  $s_i$  numărul de segmente având un capăt în punctul  $A_i$ . Arătați că există două puncte  $A_i$  și  $A_j$ , astfel încât  $s_i = s_j$ .

Clasa a VIII-a

1. Fie  $a, b, c$  trei numere reale mai mari sau egale decât  $-2$ , având suma nulă. Arătați că  $a^3 + b^3 + c^3 \geq -6$ .

2. În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  se notează cu  $M$  și  $N$  centrele fețelor  $A' B' C' D'$  și  $ADD' A'$ . Arătați că dacă  $AM \perp A' C$  și  $C' N \perp BD'$ , atunci paralelipipedul este cub.

3. Arătați că un pentagon convex cu toate unghiurile egale și trei dintre laturi congruente este regulat.

4. a) Fie  $OABC$  un tetraedru tridreptunghic ( $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ ). Se notează  $OA = p, OB = q, OC = r$  și cu  $d$  distanța de la punctul  $O$  la planul  $(ABC)$ . Arătați că are loc egalitatea:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2}.$$

- b) Fie  $a, b, c > 0$ . Să se determine o soluție a ecuației

$$\sqrt{(b+c)(b-x)(c-x)} + \sqrt{(c+a)(c-x)(a-x)} + \sqrt{(a+b)(a-x)(b-x)} = \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$