Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”, Ediţia a XXV-a, Reşiţa, 25-27 martie 2011

Barem de corectare a soluţiilor la clasa a VII-a

1.

start	$1\,p$
notează $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}=r$ şi presupune $r\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
scrie $r-\sqrt{2011}=\sqrt{26}+\sqrt{3}$	$2\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $r\sqrt{2011}+\sqrt{78}=\frac{r^2+1982}{2}\in\mathbb{Q}$	$3\,p$
ridică la pătrat şi obţine că $2r\sqrt{78\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$	$1\,p$
deduce că $\sqrt{26\cdot 3\cdot 2011}\in\mathbb{Q}$, contradicţie	$1\,p$
obţine că $\sqrt{26}+\sqrt{3}+\sqrt{2011}\notin\mathbb{Q}$	$1\,p$
Total	**10 p**

2.

start	$1\,p$
duce $AA_1\perp BC$, $II_1\perp BC$, cu $A_1, I_1\in(BC)$	$1\,p$
arată că $\Delta\, AA_1R\sim\Delta\, II_1R$	$1\,p$
deduce că $\frac{AR}{IR}=\frac{AA_1}{II_1}$ (1)	$1\,p$
folosind $AA_1\parallel II_1$ deduce că $\Delta\, AA_1P\sim\Delta\, II_1P$, unde $P\in(BC)\cap AI$	$1\,p$
obţine că $\frac{AA_1}{II_1}=\frac{AP}{IP}$ (2)	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\, ABC$ obţine $\frac{AB}{BP}=\frac{AB+AC}{BC}$ (3)	$1\,p$
cu teorema bisectoarei în $\Delta\, ABP$ obţine $\frac{AP}{IP}=\frac{AB+BP}{BP}$ (4)	$1\,p$
din $(1)-(4)$ obţine concluzia	$2\,p$
Total	**10 p**

3.

start	$1\,p$
a) arată că $a^2\in 4\mathbb{Z}\cup 4\mathbb{Z}+1$, $(\forall)a\in\mathbb{Z}$	$1\,p$
deduce că $x^2+y^2\in\mathbb{Z}\setminus(4\mathbb{Z}+3)$	$1\,p$
arată că $2011\in 4\mathbb{Z}+3$ şi trage concluzia	$1\,p$
b) pentru ecuaţia $x^2+2011^2=y^2$ observă că	
$(x,y)-$soluţie $\Longrightarrow(\pm x,\pm y)-$soluţii	$0,5\,p$
pentru $(x,y)\in\mathbb{N}$ transcrie $(y-x)(y+x)=2011^2$	$0,5\,p$
obţine că $(y-x,y+x)\in\{(1,2011^2),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\left\{\left(\pm\frac{2011^2-1}{2},\pm\frac{2011^2+1}{2}\right),(0,\pm 2011)\right\}$	$1\,p$
pentru $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2011}$ transcrie echivalent	
$xy=2011(x+y),\ x,y\neq 0\Longleftrightarrow(x-2011)(y-2011)=2011^2$	$1\,p$
obţine că $(x-2011,y-2011)\in\{\pm(1,2011^2),\pm(2011^2,1),(2011,2011)\}$	$0,5\,p$
deduce că $(x,y)\in\{(2012,2011\cdot 2012),(2010,-2010\cdot 2011),$	
$(2011\cdot 2012,2012),(-2010\cdot 2011,2010),(4022,4022)\}$	$1\,p$
trage concluzia: prima ecuaţie are 6 soluţii >5 soluţii pentru a doua ecuaţie	$1\,p$
Total	**10 p**

4.

start	$1\,p$
observă că $s_i\in\{0,1,\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$1\,p$
<u>caz 1</u> $(\exists)i_0: s_{i_0}=0\Longrightarrow s_i\in\{0,1,\ldots,n-2\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
<u>caz 2</u> $s_i\neq 0$, $(\forall)i=\overline{1,n}\Longrightarrow s_i\in\{1,2\ldots,n-1\},(\forall)i=\overline{1,n}$	$3\,p$
aplică principiul lui Dirichlet şi trage concluzia	$1\,p$
Total	**10 p**

Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Caraş-Severin

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXV-a,
Reşiţa, 25-27 martie 2011
Clasa a VIII-a - Barem orientativ de corectare

Problema 1. Start ... 1p
Scrie $(a-1)^2(a+2) \geq 0$ ... 3p
Obţine $a^3 - 3a + 2 \geq 0$ ... 3p
Scrie inegalităţile analoage pentru b şi c, apoi însumează şi obţine concluzia ... 3p

Problema 2. Start ... 1p
(Observă că punctele A, M, A', C, respectiv C', N, B, D' sunt coplanare ... 2p)
Scrie de două ori, în mod corespunzător, condiţia de patrulater ortodiagonal ... 2p (4p)
Face calculele şi obţine două egalităţi între lungimile muchiilor paralelipipedului, mai exact $x^2 + y^2 = 2z^2$ si $y^2 + z^2 = 2x^2$, unde $AB = x, BC = y, AA' = z$ ... 4p
Deduce din aceste egalităţi că paralelipipedul este cub ... 1p

Problema 3. Start ... 1p
Precizează că distingem două cazuri: cele trei laturi congruente sunt consecutive sau nu ... 1p
În primul caz ($AB = BC = CD$) deduce mai întâi că $DE = AE$ ... 2p
Deduce apoi că $AB = AE$ şi trage concluzia că $ABCDE$ este pentagon regulat ... 3p
Tratează complet (în acelaşi mod) cazul al doilea ... 3p

Problema 4. Start ... 1p
a) Fie H proiectia lui O pe (ABC) si D proiectia lui O pe BC. Calculeaza pe d ca inaltime in triunghiul dreptunghic OAD si obtine egalitatea din enunt ... 3p
b) Alege un triedru de muchii $OA = \sqrt{a}, OB = \sqrt{b}, OC = \sqrt{c}$ ... 1p
Obtine $AH = \sqrt{a - d^2}$ si analoagele; obtine $BC = \sqrt{b + c}$ si analoagele ... 1p
Obtine $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB =$
$\sqrt{(b+c)(b-d^2)(c-d^2)} + \sqrt{(c+a)(c-d^2)(a-d^2)} + \sqrt{(a+b)(a-d^2)(b-d^2)}$
... 1p
Arata ca $BH \cdot CH \cdot BC + CH \cdot AH \cdot CA + AH \cdot BH \cdot AB = BC \cdot CA \cdot AB =$
$\sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}$ ... 2p
Folosind punctul a) obtine pentru ecuatie solutia $x = \frac{abc}{bc+ca+ab}$ ... 1p