CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "GHEORGHE LAZĂR"
Ediția a VIII-a, 24-25 martie 2007
SIBIU

Clasa a VII-a

1) a) Să se arate că dacă $x, y, z > 0$ şi $(x + y + z)z = 3xy$, atunci $x^2 + y^2 \geq 2z^2$.

b) Determinaţi numerele naturale a, b, c, d, e diferite doua câte două, ştiind că:

$$1 + a^2 + ab^2 + abc^2 + abcd^2 = abcde$$

Dumitru Barac, Sibiu

2) Fie m, n, k numere reale nenule date. Să se determine numerele reale a, b, c care verifică relaţiile:

$$ma + nb - c = k \text{ si } 2mnab - c^2 = k^2$$

Monica Sas, Năsăud

3) Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = 5$, $BC = 6$ iar $C \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ sunt respevtiv picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B respectiv C. Notăm cu $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$ (ortocentrul triunghiului ABC). Să se calculeze:

a) $HD + HE + HF$

b) aria triunghiului DEF

Petrică Dicu, Sibiu

4) Fie AD bisectoare exterioară a triunghiului ABC (D pe dreapta BC, $AB \neq AC$). Perpendicularele din B şi C pe AD intersectează dreapta AC în E respectiv dreapta AB în F. Arătaţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.

Emil.C Popa, Sibiu

Clasa a VII-a - barem de corectare

1) a) Să se arate că dacă $x, y, z > 0$ şi $(x+y+z)z = 3xy$, atunci $x^2 + y^2 \geq 2z^2$.

b) Determinaţi numerele naturale a, b, c, d, e diferite doua câte două, ştiind că:

$$1 + a^2 + ab^2 + abc^2 + abcd^2 = abcde$$

Dumitru Barac, Sibiu

a) Folosind inegalitatea mediilor, avem

$3xy = [(x+y+z)]z \geq (2\sqrt{xy} + z)z = 2z\sqrt{xy} + z^2$ 1p

Deci $0 \geq z^2 + 2z\sqrt{xy} - 3xy = (z - \sqrt{xy})(z + 3\sqrt{xy})$ 1p

De unde rezultă că: $z \leq \sqrt{xy}$ 1p

Cum $x^2 + y^2 \geq 2xy = 2(\sqrt{xy})^2 \geq 2z^2$ obţinem $x^2 + y^2 \geq 2z^2$ 1p

b) Niciunul dintre numere nu poate fi nul 0.5p

Rezultă că $a|1$, deci $a = 1$ 0.5p

Ecuaţia devine: $2 + b^2 + bc^2 + bcd^2 = bcde$

Deci $b|2$ şi cum $b \neq a = 1$, rezultă $b = 2$ 0,5p

Ecuaţia devine: $3 + c^2 + cd^2 = cde$

De unde $c|3$ şi cum $c \neq a = 1$, rezultă $c = 3$ 0.5p

Obţinem $4 + d^2 = dc \Rightarrow d|4$ şi cum $d \neq a = 1$, $d \neq b = 2 \Rightarrow d = 4$ 0.5p

Ecuaţia devine: $c = 5$

Soluţia: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5$ 0.5p

TOTAL 7p

Clasa a VII-a - barem de corectare

2) Fie m, n, k numere reale nenule date. Să se determine numerele reale a, b, c care verifică relaţiile:

$$ma + nb - c = k \text{ si } 2mnab - c^2 = k^2$$

Monica Sas, Năsăud

Avem: $c = ma + nb - k$ 1p

şi $2mnab - (ma + nb - k)^2 = k^2$ 1p

Ultima egalitate este echivalentă cu $(ma - k)^2 + (nb - k)^2 = 0$ 2p

De unde: $ma - k = 0$ şi $nb - k = 0$ 1p

adică: $a = \frac{k}{m}$ şi $b = \frac{k}{n}$ 1p

Înlocuind în prima relaţie, obţinem $c = k$ 1p

TOTAL 7p

Clasa a VII-a - barem de corectare

3) Fie triunghiul ABC în care $AB = AC = 5$, $BC = 6$ iar $C \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ sunt respevtiv picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B respectiv C. Notăm cu $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$ (ortocentrul triunghiului ABC). Să se calculeze:

a) $HD + HE + HF$

b) aria triunghiului DEF

Petrică Dicu, Sibiu

a) $AB = AC$ şi $AD \perp BC = 0 \Rightarrow BD = DC = 3$ 0.5p

$\triangle\ ADC$ dreptunghic, $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 16 \Rightarrow AD = 4$ 0.5p

$\triangle\ AHE \sim \triangle\ ADC$ ($\hat{A}$-comun, $\widehat{AEH} = \widehat{ADC} = 90°$).

$\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{HE}{DC} = \dfrac{AE}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{AH}{5} = \dfrac{HE}{3} = \dfrac{AE}{4}$ 0.5p

Din teorema lui Menelaos aplicată triunghiului ADC şi punctelor coliniare B, H, E obţinem

$\dfrac{BC}{BD} \cdot \dfrac{HD}{HA} \cdot \dfrac{EA}{EC} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{HD}{HA} \cdot \dfrac{EA}{EC} = 1$ 0.5p

Cu notaţiile $HD = x$, $HE = y$ şi $AE = z$ obţinem sistemul

$\begin{cases} \dfrac{4-x}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} \\ 2 \cdot \dfrac{x}{4-x} \cdot \dfrac{z}{5-z} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4},\ y = \dfrac{21}{20},\ z = \dfrac{7}{5}$ 1p

Cum $HE = HF$ (triunghiul fiind isoscel), avem

$HD + HE + HF = x + y + z = \dfrac{9}{4} + \dfrac{21}{10} = \dfrac{87}{20}$ 1p

b) Notăm aria triunghiului ABC cu S_{ABC}. Avem:

$S_{DEF} = S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}$ 0.5p

$\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \dfrac{S_{CDE}}{S_{ABC}} =$

$= 1 - \dfrac{AF \cdot AE \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} - \dfrac{BF \cdot BD \cdot \sin B}{BA \cdot BC \cdot \sin B} - \dfrac{CD \cdot CE \sin C}{BC \cdot AC \cdot \sin C}$ 0.5p

$= 1 - \dfrac{AF}{AB} \cdot \dfrac{AE}{AC} - \dfrac{BF}{BA}\dfrac{BD}{BC} - \dfrac{CD}{BC} \cdot \dfrac{CE}{AC}$ 0.5p

Din punctul a) $AE = AF = \frac{7}{5}$

Deci $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{7}{25}$, $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{18}{25}$, $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{1}{2}$ 0.5p

$S_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = 12$

Înlocuind obţinem $S_{DEF} = 12 \cdot \frac{126}{625} = \frac{1512}{625}$ 1p

TOTAL 7p

4) Fie AD bisectoare exterioară a triunghiului ABC (D pe dreapta BC, $AB \neq AC$). Perpendicularele din B şi C pe AD intersectează dreapta AC în E respectiv dreapta AB în F. Arătaţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.

Emil.C Popa, Sibiu

Conform teoremei bisectoarei $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ 2p

$EA = AB$, $FA = AC$ 1p

$EC = FB$ 1p

Deci $\dfrac{DB}{DC} \cdot \dfrac{EC}{EA} \cdot \dfrac{FA}{FB} = 1$ 2p

Conform reciprocei teoremei lui Menelaos punctele D, E, F sunt coliniare 1p

TOTAL 7p