

## Clasa a VII-a - barem de corectare

1) Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Să se arate că dacă numerele  $n$ ,  $n^2 + n + 1$  și  $n^3 + n^2 + n + 4$ , sunt simultan prime atunci și numerele  $n^4 - 2$  și  $n^5 - 2$  sunt prime.

Cazul  $n = 2$  nu convine.....0,5p

Analizăm cazurile  $n = 3k$ ,  $n = 3k + 1$ ,  $n = 3k + 2$ .....0,5p

Dacă  $n = 3k$ , atunci pentru  $k \geq 2$  numărul  $n$  nu e prim ..... 1p

Pentru  $k = 1$  obținem tripleta de numere prime 3,13,43 ..... 1p

Dacă  $n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 3(3k^2 + 3k + 1)$ -nu e prim ..... 1p

Dacă  $n = 3k + 2 \Rightarrow n^3 + n^2 + n + 4 = 3(9k^3 + 21k^2 + 16k + 6)$ - nu e prim ..... 1p

$n, n^2 + n + 1, n^3 + n^2 + n + 1$ , simultan prime  $\Rightarrow n = 3$ ..... 1p

Deci  $n^4 - 2 = 79$ ,  $n^5 - 2 = 241$  sunt numere prime ..... 1p

**TOTAL** ..... 7p

2) Se consideră  $A = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{18}} - \sqrt{3}$ . Arătați că  $A^{2008} - 16$  se divide cu 255.

Avem  $A = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} =$ ..... 2p

$= \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{2}$ ..... 1p

$A^{2008} - 16 = 2^{1004} - 2^4 = (2^4)^{251} - 2^4$ ..... 1p

$= 2^4 [(2^4)^{250} - 1] = 2^4 [(2^8)^{125} - 1]$ ..... 1p

$= 2^4 [(255 + 1)^{125} - 1] = 2^4 \cdot (\mathcal{M}_{255} + 1 - 1)$ ..... 1p

Deci  $A^{2008} - 16$  se divide cu 255..... 1p

**TOTAL** ..... 7p

3) În paralelogramul  $ABCD$  se consideră un punct  $M$  pe dreapta  $CD$ , diferit de  $C$  și  $D$ . Dreptele  $AM$  și  $BC$  se intersectează în  $N$ . Să se arate că triunghiurile  $DMN$  și  $BCM$  au aceeași arie.

Notăm aria triunghiului  $DMN$  cu  $S_{DMN}$  etc.

$S_{DMN} = S_{BCN}$  (adăugăm  $S_{AMD}$ )..... 1p

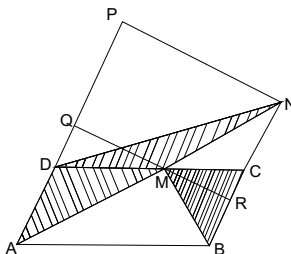
$\Leftrightarrow S_{ADN} = S_{ADM} + S_{BCM}$ ..... 1p

$\Leftrightarrow \frac{AD \cdot NP}{2} = \frac{AD \cdot MQ}{2} + \frac{BC \cdot MR}{2}$  unde  $NP \perp AD$ ,  $MQ \perp AD$ ,  $MR \perp BC$ . 2p

$\Leftrightarrow NP = MQ + MR$  (deoarece  $AD = BC$ )..... 1p

Deoarece  $MQ \perp AD$ ,  $MR \perp BC$ ,  $AD \parallel BC \Rightarrow Q, M, R$  coliniare..... 1p

Deci  $NP = MQ + MR$  ..... 1p



**TOTAL** ..... 7p

**Clasa a VII-a - barem de corectare**

4) a) Să se arate că pentru orice  $x$  real strict pozitiv are loc egalitatea:

$$1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2.$$

b) Demonstrați inegalitatea:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2008^2} + \frac{1}{2009^2}} < \\ < \frac{1}{2} \left(2009 - \frac{1}{2009}\right) \end{aligned}$$

*Dumitru Barac, Sibiu*

a) Efectuând calculele avem

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)^2 &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \dots\dots\dots 1p \\ &= 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

b) Notând cu  $S$  suma din membrul stâng al inegalității și cu  $T$  suma

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2007^2} + \frac{1}{2008^2}} \dots\dots 1p$$

fiecare sumă are același număr de termeni (1004). Comparând sumele  $S$  și  $T$  termen cu termen, rezultă  $S < T$  \dots\dots\dots 1p

Din punctul a) putem scrie

$$\begin{aligned} 2S < T + S &= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \\ &+ \sqrt{1 + \frac{1}{2008^2} + \frac{1}{2009^2}} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

De aici, utilizând a) obținem:

$$\begin{aligned} 2S < \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2009}\right) \dots 1p \\ &= 2008 + 1 - \frac{1}{2009} = 2009 - \frac{1}{2009} \\ \text{de unde } S < \frac{1}{2} \left(2009 - \frac{1}{2009}\right) \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

**TOTAL** \dots\dots\dots 7p