CONCURSUL DE MATEMATICĂ GHEORGHE DUMITRESCU

Ediţia a XII-a

Craiova, 5 noiembrie 2010

Clasa a V-a

1. Determinaţi cifrele a,b,c ştiind ca $\overline{aa} \cdot \overline{bb} = \overline{bccb}$.
2. Suma a trei numere naturale impare consecutive, împărtiţă la 3 dă câtul 2010 si un rest r. Determinaţi cele trei numere.
3. a) Comparaţi numerele $3 \cdot 2^{6034}$ si $2 \cdot 3^{4023}$.

   b) Determinaţi numărul zerourilor cu care se termină numărul

   A= $2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 12^{n+1} + 2^{2n} \cdot 15^{n} \cdot 5^{n+1} - 10^{2n+1} \cdot 3^{n+2}$.

(*Selecţie realizată de prof. Ileana Didu*)

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10 .

Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că fracţia $\dfrac{n\cdot(n+2008)\cdot(n+2009)+2010}{2^{n+1}\cdot 5^{n}+1}$ este reductibilă, $(\forall)n\in N$.

(***)

2. a) Determinaţi $n\in N$ ştiind că cel mai mare divizor comun al numerelor 3*n*+7 şi 2*n*+6 este *n*+1.

(G.M.nr. 5/2009)

b) Determinaţi numerele prime *a*, *b*, *c* ştiind că $a+b=80$ şi $a-b+c=56$.

(R.M.T. nr.1/2009).

3. a) Să se afle măsurile unghiurilor $\angle AOB$ si $\angle COD$ ştiind că semidreapata $[OC$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$ şi că $[OC$ formează cu $[OA$ un unghi cu măsură de $25^{\circ}30'$, iar semidreapta $[OD$ este opusă semidreptei $[OA$.

b) Fie $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ puncte coliniare, în aceasta ordine, astfel încât $A_0A_1=1,\ A_1A_2=2,\ A_2A_3=3,$ şi aşa mai departe, fiecare segment având lungimea cu o unitate mai mare decât lungimea segmentului precedent. Dacă $MN=60$, unde *M* este mijlocul segmentului $[A_0A_1]$ şi *N* este mijlocul segmentului $[A_{k-1}A_k]$, aflaţi lungimea segmentului $[A_0A_k]$.

(***)

(*Selecţie realizată de prof. Camelia Dană*)

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10 .

Timp de lucru: 2 ore.

. Clasa a VII-a

1. Fie x, y, z trei numere raţionale nenule pentru care $x + y + z \neq 0$ şi

$$\frac{-x+y+z}{x} = \frac{x-y+z}{y} =. \frac{x+y-z}{z}$$

Să se calculeze valoarea raportului $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$.

(***)

2. Să se determine numărul natural n din egalitatea:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 7} + \frac{2^2}{7\cdot 15} + \frac{2^3}{15\cdot 31} + ... + \frac{2^{n-1}}{(2^n-1)\cdot(2^{n+1}-1)} = \frac{2^{2010}-1}{2^{2011}-1}.$$

(***)

3. Fie dreptunghiul $ABCD$. Se consideră punctul M pe diagonala $[AC]$ astfel încât $MB = \frac{CD}{2}$ şi m ($\angle ABM$) = 60°, punctul T mijlocul lui $[AM]$ şi punctul Pmij-locul lui $[CD]$.
   a) Să se arate că $MB \perp AC$.
   b) Dacă $PT \cap AB = \{ Q \}$ să se arate că $\angle PQB \equiv \angle TBC$.

(***)

(Selecţie realizată de prof. Maria Ionescu)

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10 .

Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a VIII-a

I. 1.Calculaţi:

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\ldots\ldots..+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{\sqrt{90}}\right):\left(\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}}\right).$$

2. Dacă 0 < a < b, atunci arătaţi că:

a) $\frac{a+b}{2} \in$ (a; b) şi b) $\sqrt{a\cdot b} \in$ (a; b).

(***)

II. 1. Arătaţi că numărul: $\sqrt{A} \in$ N, unde :

A = 2· (1 + 2 + ... + 100)· ($\frac{1}{1\cdot 2}$ + $\frac{1}{2\cdot 3}$ + ... + $\frac{1}{100\cdot 101}$).

2. Arătaţi că :

$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+2}$ este număr iraţional pentru orice n $\in$ N.

(***)

III. 1. Paralelogramele ABCD şi ABEF sunt situate în plane diferite. Dacă O şi Q sunt centrele paralelogramelor ABCD şi respectiv ABEF, iar M este mijlocul laturii

BC, să se arate că:

a) CD || EF

b) (OQM) || (DEC).

2. Se dau două drepte necoplanare a şi b şi un punct P nesituat pe nici una din ele. Să se ducă prin punctul P o dreaptă care să fie coplanară atât cu dreapta a cât şi cu dreapta b.

(***)

(*Selecţie realizată de prof. Dan Gurgui*)

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10 .

Timp de lucru: 2 ore.