

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a VIII-a, 19 februarie 2011
CLASA a V-a

1. a. Demonstrați că un număr natural care se scrie în baza 10 folosind doar cifrele 1,3 și 5 nu poate fi pătrat perfect.

Gazeta matematică nr. 3/ 2010

b. În fiecare linie a unui tablou pătratic cu 2011 linii și 2011 coloane sunt scrise în mod arbitrar numerele $1,2,3,\dots,2011$. Dacă repartizarea numerelor în tablou este simetrică în raport cu o diagonală a sa, demonstrați că toate numerele de la 1 la 2011 se găsesc pe acea diagonală.

Prof. Amelia Pavelescu, Rm. Vâlcea

2. Se dă numărul $x = \overline{2010a_1a_2a_3\dots a_n2011}$, $n \in \mathbb{N}$, având suma cifrelor 2011.

a. $x - 9$ este pătrat perfect?

b. Aflați n știind că în scrierea numărului x se folosesc toate cifrele sistemului zecimal, și x este cel mai mic număr în condițiile date.

Prof. Leon Genoiu, Rm. Vâlcea

3. Fie numerele $x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$ și $y = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 27$.

a. Demonstrați că $(x + y) : 5^4$;

b. Comparați numerele x^y și y^x ;

c. Arătați că numerele x și y dau același rest la împărțirea cu 449.

Prof. Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

4. Fie numărul $A = \overline{888\dots 88k99\dots 999}$ în care cifrele 8 și 9 se repetă de câte 50 de ori fiecare.

a. Arătați că numărul 111111 este divizibil cu 7.

b. Aflați cifra k pentru care numărul A este divizibil cu 7.

Prof. Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a VIII-a, 19 februarie 2011

CLASA a VI-a

1. Fie $n = \frac{\overline{abcd}}{\overline{ab+cd}}$ unde $\overline{abcd}, \overline{ab}, \overline{cd}$ sunt numere naturale scrise în baza 10.

a. Dacă $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ demonstrați că $x \leq y \Leftrightarrow \frac{x}{x+z} \leq \frac{y}{y+z}$.

b. Determinați \overline{abcd} dacă $n \in \mathbb{N}$ și n este minim.

c. Determinați \overline{abcd} dacă $n \in \mathbb{N}$ și n este maxim.

Prof. univ. dr. Dumitru Acu, Sibiu

2. Există două puteri diferite ale numărului 3 care au ultimele trei cifre respectiv egale? Justificați!

Prof. Elena Drăgan, Râmnicu-Vâlcea

3. Se consideră 170 cartonașe colorate pe o față în albastru, iar pe cealaltă față în roșu. Fiecare cartonaș se numerotează pe ambele fețe cu un același număr, dela 1 la 170, neexistând două cartonașe numerotate la fel. Inițial toate cartonașele sunt așezate cu fața roșie în sus. Denumim „operația 1” întoarcerea tuturor cartonașelor cu fața roșie în jos; „operația 2” înseamnă întoarcerea tuturor cartonașelor numerotate cu numere divizibile cu 2, și așa mai departe, „operația n ” însemnând întoarcerea tuturor cartonașelor numerotate cu numere divizibile cu n .

a. Calculați suma numerelor înscrise pe cartonașele rămase cu fața roșie în sus, după efectuarea primelor două operații;

b. Calculați suma numerelor înscrise pe cartonașele rămase cu fața roșie în sus, după efectuarea primelor trei operații;

c. Stabiliți câte cartonașe rămân cu fața albastră în sus după efectuarea succesivă a tuturor operațiilor de la 1 la 170, fiecare operație efectuându-se o singură dată.

Prof. Dumitru Dobre, Râmnicu-Vâlcea

Prof. Cecilia Deaconescu, Pitești

4. Fie unghiurile suplementare AOB și BOC astfel încât $m(\sphericalangle AOB) > m(\sphericalangle BOC)$.

Dacă punctele M și P sunt în interiorul unghiului AOB astfel încât

$m(\sphericalangle MOP) = m(\sphericalangle BOC)$ și (OX, OY) sunt bisectoarele unghiurilor MOA și respectiv

POB , arătați că $m(\sphericalangle XOY) \leq 90^\circ$. În ce situație avem egalitate?

Prof. Cătălin Stănică, Brăila

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a VIII-a, 19 februarie 2011
CLASA a VII-a

1. a. Arătați că $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

b. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $(\exists)x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1005(2011^n + 1) = 2(x^2 + x)$.

Prof. Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea

2. Considerăm trei numere de câte 2001 cifre:

$A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{2001}}$, $B = \overline{b_1 b_2 \dots b_{2001}}$, $C = \overline{c_1 c_2 \dots c_{2001}}$. Să se arate că în scrierea acestor numere

există x, y, z astfel încât $a_x = a_y = a_z$; $b_x = b_y = b_z$; $c_x = c_y = c_z$,

$x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots, 2001\}$.

Prof. dr. Marcel Teleucă, Chișinău

3. În triunghiul ascuțitunghic ABC se consideră mediana $[AM]$ și înălțimea $[CH]$,

$M \in (BC)$, $H \in (AB)$. Dacă punctul $D \in (AC)$, $BD \cap AM = \{K\}$, $AM \cap CH = \{N\}$ și

$AK = BK$ demonstrați că:

a. $AN = 2 \cdot MK$;

b. Dacă punctul K este mijlocul lui $[MN] \Rightarrow 9S_{\triangle ANC} = 10S_{\triangle AKD}$.

Prof. Elena Drăgan, Rm. Vâlcea

Prof. Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

4. Fie $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$. În semiplanul determinat de CD și punctual A construim triunghiul echilateral RDC , iar în semiplanul determinat de AB și punctual C construim triunghiul echilateral SAB . Demonstrați că:

a. Dreptele RS , AC și BD sunt concurente;

b. Dreapta RS trece prin mijlocul $[AB] \Leftrightarrow AD = BC$

Prof. Manuela Prajea, Drobeta-Tr. Severin

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Colegiul Național „Mircea cel Bătrân”, Râmnicu-Vâlcea

Concursul Interjudețean
„Mathematica – modus vivendi”
Ediția a VIII-a, 19 februarie 2011
CLASA a VIII-a

1. a. Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ și dacă $[a, b] \cap \mathbb{N} = \{a, b, c\}$, arătați că $\frac{2ab}{a+b} < c$.

b. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația: $(x+4)^4 + (x+2)^4 = 272$.

Prof. dr. Cătălin Pană, Rm. Vâlcea

2. Fie numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Demonstrați că $\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geq 1$.

Prof. Gabriela Ene, Rm. Vâlcea

Prof. Marin Mazilu, Rm. Vâlcea

3. Pe latura (CD) a trapezului $ABCD$ ($AD \parallel BC$) există un punct K , astfel încât triunghiul ABK este echilateral.

a. Demonstrați că pe latura (AB) există punctul L , astfel încât triunghiul CDL este echilateral.

b. Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor ADK și BCK au raze egale.

Prof. Elena Drăgan, Rm. Vâlcea

4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic și punctele $M \in (BC)$,

$N \in (C'D')$, $P \in (DD')$ astfel încât $BM = C'N = DP$. Demonstrați că:

$AM \perp (BB'N)$ și $B'M \perp (ABP) \Leftrightarrow ABCD A' B' C' D'$ este cub.

Prof. Constantin Bărbășcu, Rm. Vâlcea

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte