Concursul Interjudețean „Mathematica – modus vivendi”
Ediția a VIII-a, 19 februarie 2011

BAREM CLASA a V-a

1. a. Dacă cifra unităților este $3 \Rightarrow$ nu e pătrat perfect..1p
Dacă cifra unităților este $5 \Rightarrow$ numărul este divizibil cu $5 \Rightarrow$ pătratul său este divizibil cu 25, deci cifra zecilor trebuie să fie 2..1p
Dacă cifra unităților este $1 \Rightarrow$ numerele 11^2, 21^2 sau 31^2 care au cifra zecilor pară..........1p
b. Fiecare număr apare în tablou de 2011 ori..1p
Presupunem că unul dintre numerele de la 1 la 2011 nu apare pe diagonala tabloului....1p
Acel număr apare în tablou numai în căsuțe simetrice, deci numărul de apariții este par...1p
2011 este nr. par, fals $\Rightarrow$ presupunerea făcută este falsă.. 1p

2. a. $u(x-2009)=2 \Rightarrow x-2009$ nu e pătrat perfect..2p
b. $x=$ min. dacă ar conține cât mai multe cifre de 9, $a_1=3, a_2=4, a_3=5,...,a_6=8$ 2p
$a_7+a_8+...+a_n=1971$ 1p
$1971 \vdots 9 \Rightarrow 219$ cifre de 9..1p
$a_7=a_8=...=a_{225}=9 \Rightarrow n=225$ 1p

3. a. Din factorii 5,15 şi $25 \Rightarrow x,y \vdots 5^4$ 1p
$(x+y)\vdots 5^4$ 1p
b. $x=y\cdot 29\cdot 31<y\cdot y=y^2<y^{29\cdot 31}$ 1p
$x^y<\left(y^{29\cdot 31}\right)^y=y^{29\cdot 31\cdot y}=y^x$ 1p
c. $x-y=y\cdot 2\cdot 449 \Rightarrow 449\,|\,(x-y)$..1p
$x=449\cdot c_1+r_1, y=449\cdot c_2+r_2, r_1, r_2<449$ 0,5p
Dacă $r_1 \geq r_2 \Rightarrow x-y=M_{449}+r_1-r_2$ şi
$r_1-r_2<449 \Rightarrow 449\,|\,(r_1-r_2) \Rightarrow r_1-r_2=0 \Rightarrow r_1=r_2$..1p
Analog $r_1 \leq r_2$..0,5p

4. a. 111111 divizibil cu 7..1p
b. $A=888888\cdot 10^{95}+...+888888\cdot 10^{53}+\overline{88k99}\cdot 10^{48}+999999\cdot 10^{42}+...+999999$ 2p
$A=M_{111111}+\overline{88k99}\cdot 10^{48}=M_7+\overline{88k99}\cdot 10^{48}\vdots 7$ 2p
$\overline{88k99}\cdot 10^{48}\vdots 7 \Rightarrow \overline{88k99}\vdots 7 \Rightarrow 12585\cdot 7+\overline{k04}\vdots 7$ 1p
$\overline{k04}\vdots 7 \Rightarrow k=5$..1p

BAREM CLASA a VI-a

1. a. $\dfrac{x}{x+z} \leq \dfrac{y}{y+z} \Leftrightarrow x(y+z) \leq y(x+z)$..1p
$xy+xz \leq xy+yz \Leftrightarrow x \leq y$ 1p
b. $n=1+\dfrac{99\cdot \overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}$ 1p
$$10 \leq \overline{ab} \Leftrightarrow \frac{10}{10+\overline{cd}} \leq \frac{\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}} \Leftrightarrow \frac{99\cdot 10}{10+\overline{cd}} \leq \frac{99\cdot \overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}} \Leftrightarrow$$
$1+\dfrac{99\cdot 10}{10+\overline{cd}} \leq 1+\dfrac{99\cdot \overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}}=n \in \mathbb{N}$ 1p

$n=\min \Leftrightarrow 10+\overline{cd}=99 \Leftrightarrow \overline{cd}=89 \Rightarrow \overline{abcd}=1089$ 1p

c. $\overline{ab} \le 89 \Leftrightarrow \frac{\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}} \le \frac{89}{89+\overline{cd}} \Leftrightarrow \frac{99\cdot\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}} \le \frac{99\cdot 89}{89+\overline{cd}} \Leftrightarrow$

$n=1+\frac{99\cdot\overline{ab}}{\overline{ab}+\overline{cd}} \le 1+\frac{99\cdot 89}{89+\overline{cd}}$, $n\in\mathbb{N}$ 1p

$n=\max \Leftrightarrow 89+\overline{cd}=99 \Leftrightarrow \overline{cd}=10 \Leftrightarrow \overline{abcd}=8910$ 1p

2. Fie şirul format cu termenii: $3^1, 3^2, 3^3, ..., 3^{1001}$ 2p

La împărțirea termenilor şirului la 1000 se obțin resturile 0,1,2,…,999……………………1p

Fiind 1000 resturi şi 1001 termeni în şir, conform principiului cutiei există doi termeni care dau acelaşi rest la împărțirea cu 1000…………………………………………………………2p

Diferența celor doi termeni e divizibilă cu 1000, deci cele două puteri ale lui 3 au ultimele trei cifre respectiv egale……………………………………………………………………2p

3. a. După ,,operația 2" cartonaşele care rămîn cu fața roşie în sus sunt cele inscripționate cu numerele pare…………………………………………………………………………………………1p

Suma este $2+4+6+...+170=7310$ 1p

b. După ,,operația 3" mai apar cu fața roşie în sus şi cele inscripționate cu multiplii lui 3 impari, dar dispar cele inscripționate cu multiplii lui 6………………………………...1p

Suma este $7310+(3+9+15+...+165)-(6+12+...+168)=7226$ …………………..1p

c. Pentru ca un cartonaş să rămână cu fața albastră în sus trebuie să fie supus unui număr impar de întoarceri……………………………………………………………………1p

Numărul inscripționat pe el trebuie să aibă un număr impar de divizori, adică să fie pătrat perfect……………………………………………………………………………………...1p

De la 1 la 170 sunt 13 pătrate perfecte, deci rămân 13 cartonaşe cu fața albastră în sus..1p

4. Cazul I. Dacă $M\in Int\measuredangle AOP$, notam:

$m(\measuredangle BOC)=m(\measuredangle MOP)=a, m(\measuredangle AOM)=b, m(\measuredangle POB)=c$

$2a+b+c=180^0$ ……………………………………………………………………0,5p

$m(\measuredangle AOX)=m(\measuredangle XOM)=\frac{b}{2}, m(\measuredangle POY)=m(\measuredangle YOB)=\frac{c}{2}$ …………………………0,5p

$m(\measuredangle XOY)=m(\measuredangle XOM)+m(\sphericalangle MOP)+m(\measuredangle POY)=\frac{2a+b+c}{2}=90^0$ ………………2p

Cazul II. Dacă $P\in Int\measuredangle AOM$, notam:

$m(\measuredangle BOC)=m(\measuredangle MOP)=a, m(\measuredangle AOP)=b, m(\measuredangle MOB)=c$

Analog $2a+b+c=180^0$.

$m(\measuredangle AOX)=m(\measuredangle XOM)=\frac{a+b}{2}, m(\measuredangle POY)=m(\measuredangle YOB)=\frac{a+c}{2}$ …………………0,5p

Arătăm că $Y\notin Int\measuredangle AOX$ deoarece $\frac{a+b}{2}<b+\frac{a+c}{2} \Leftrightarrow m(\measuredangle AOX)<m(\measuredangle AOY)$ …….1p

$m(\measuredangle AOX)+m(\measuredangle YOB)+m(\measuredangle BOC)=90^0+a>90^0$ …………………………………..1p

$m(\measuredangle XOY)=180^0-[m(\measuredangle AOX)+m(\measuredangle YOB)+m(\measuredangle BOC)]<90^0$ ……………………...1p

Egalitatea are loc dacă $M\in Int\measuredangle AOP$ ………………………………………………..0,5p

BAREM CLASA a VII-a

1.a. Demonstrarea egalității..1p

b. $(2x+1)^2 = 2011(2010\cdot 2011^{n-1}+1)$..2p

2011 este număr prim și $2011 \mid (2x+1)^2 \Rightarrow 2011 \mid (2x+1)$.......................................1p

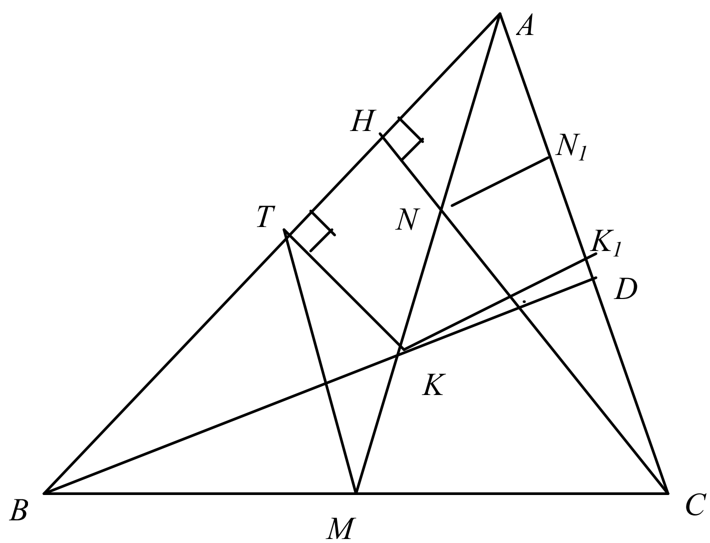
$2011^2 \mid (2x+1)^2 \Rightarrow 2011 \mid (2010\cdot 2011^{n-1}+1)$..2p

Pentru $n=1$ rezultă că propoziția este adevărată, deoarece pentru

$n>1 \Rightarrow 2010\cdot 2011^{n-1}+1 = M_{11}+1 \not\vdots\, 2011$..1p

2. Așezăm cele trei numerele unul sub celălat..2p
Pe coloane apar triplete de câte trei cifre de la 000 la 999, adică 1000 de triplete..........2p
Cum noi avem 2001 coloane pe care apar 1000 de triplete, și cum $1000\cdot 2+1=2001 \Rightarrow$
conform principiului cutiei că există trei coloane pe care apar scrise aceleași triplete ...2p
Există x, y, z în scrierea numerelor A, B, C astfel încât să fie îndeplinite cerințele problemei..1p

3.



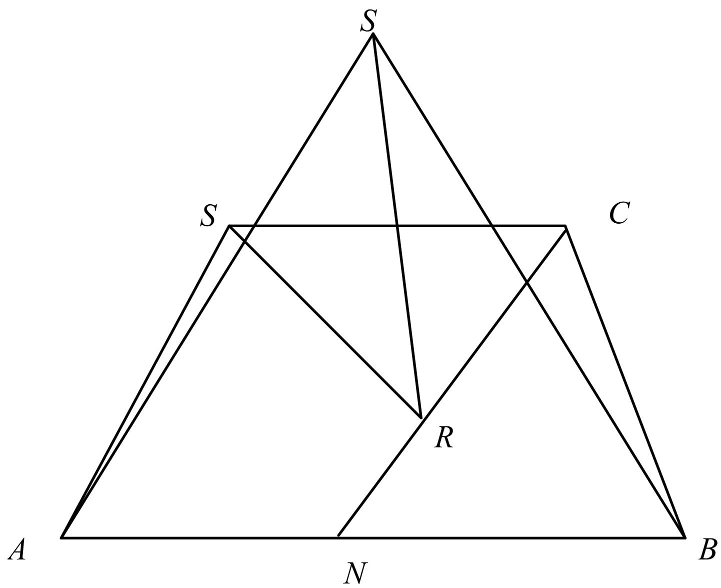
a. Fie $KT \perp AB$..2p
(TM) linie mijlocie$\Rightarrow \angle TMA \equiv \angle MAC$, dar din $KT \parallel CM \Rightarrow \angle TKM \equiv \angle ANC$ 1p

$\Delta KMT \sim \Delta ANC \Rightarrow \dfrac{KM}{NA} = \dfrac{1}{2}$ 1p

b. Aplicăm teorema Menelaus în ΔAMC cu transversala $B, K, D \Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{3}{5}$ 1p

Fie $NN_1 \perp AC, KK_1 \perp AC \Rightarrow \Delta ANN_1 \sim \Delta AKK_1 \Rightarrow \dfrac{NN_1}{KK_1} = \dfrac{2}{3}$ 1p

$$\frac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta AKD}} = \frac{\dfrac{AC\cdot NN_1}{2}}{\dfrac{AD\cdot KK_1}{2}} = \frac{AC}{AD}\cdot\frac{NN_1}{KK_1} = \frac{10}{9}$$ 1p



4.

a. Fie $CR \cap AB = \{N\}$, $\measuredangle DCN \equiv \measuredangle CNB$ alt. int. $\Rightarrow \measuredangle CNB \equiv \measuredangle SAB \Rightarrow CR \,||\, SA \Rightarrow CRAS$ trapez...1p

Fie $SR \cap AC = \{O\} \Rightarrow \Delta COR \sim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{CR}{SA}$ 1p

Fie $AC \cap BD = \{O'\} \Rightarrow \Delta DO'C \sim \Delta AO'B \Rightarrow \dfrac{CO'}{AO'} = \dfrac{DC}{AB}$ 1p

$\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{CO'}{AC} \Rightarrow O = O'$ 1p

b. Fie $SR \cap AB = \{M\}$

,, $\Rightarrow$ ''

ΔSAB echilateral şi $[SM]$ mediană $\Rightarrow SM$ mediatoarea $[AB]$

$SM \perp AB \Rightarrow SM \perp DC$, dar ΔRDC echilateral $\Rightarrow SM$ mediatoarea $[DC]$...............1p

SM axa de simetrie a trapezului $ABCD \Rightarrow AD = BC$ 1p

,, $\Leftarrow$ ''

$\Delta SDA \equiv \Delta SCB \Rightarrow \measuredangle DSA \equiv \measuredangle CSB \Rightarrow \measuredangle ASM \equiv \measuredangle BSM \Rightarrow SM$ bisectoare în triunghiul SAB echilateral $\Rightarrow SM$ mediană..1p

BAREM CLASA a VIII-a

1. a. $a,b,c =$ numere naturale consecutive $\Rightarrow c = \dfrac{a+b}{2}$ 1p

$\dfrac{2ab}{a+b} < \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow \dfrac{2ab}{a+b} < c$ 1p

b. Not. $t = \dfrac{x+2+x+4}{2}, t \in \mathbb{R}$ 1p

$(t+1)^4+(t-1)^4=272 \Rightarrow t^4+6t^2-135=0$ 1p

$(t^2+15)(t^2-9)=0 \Rightarrow t^2=9$ 2p

$x^2+6x+9=9 \Rightarrow x \in \{0,-6\}$ 1p

2. Se ştie că $ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow 2+ab \le \frac{a^2+b^2+4}{2} \Rightarrow \frac{1}{2+ab} \ge \frac{2}{a^2+b^2+4}$ 2p

Analog $\frac{1}{2+bc} \ge \frac{2}{c^2+b^2+4}, \frac{1}{2+ac} \ge \frac{2}{a^2+c^2+4}$ şi prin însumare obținem

$\frac{1}{2+ab}+\frac{1}{2+cb}+\frac{1}{2+ac} \ge \frac{2}{a^2+b^2+4}+\frac{2}{c^2+b^2+4}+\frac{2}{a^2+c^2+4}$ 2p

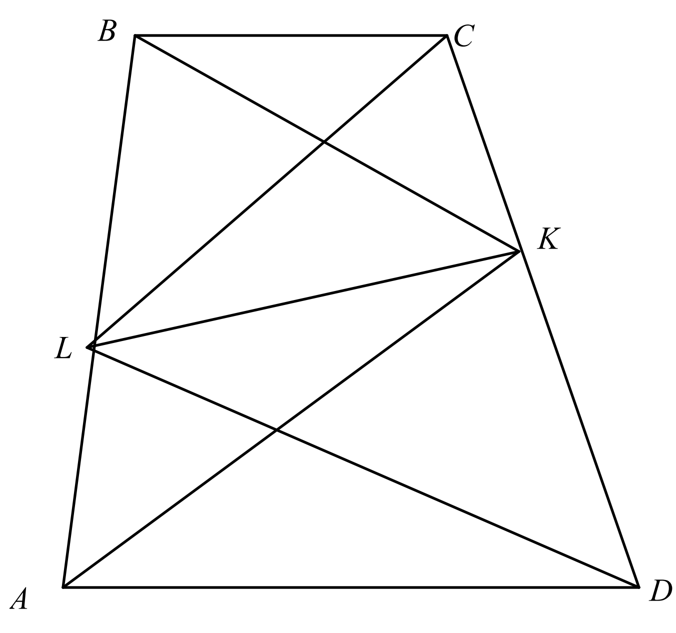
Se ştie că $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9, x, y, z$ pozitive, şi considerând $x=\frac{2}{4+a^2+b^2}$,

$y=\frac{2}{4+c^2+b^2}$, $z=\frac{2}{4+a^2+c^2}$ obținem:

$\left(\frac{2}{4+a^2+b^2}+\frac{2}{4+c^2+b^2}+\frac{2}{4+a^2+c^2}\right)\left(\frac{4+a^2+b^2+4+c^2+b^2+4+a^2+c^2}{2}\right) \ge 9$ ....
....2p

$\left(\frac{2}{4+a^2+b^2}+\frac{2}{4+c^2+b^2}+\frac{2}{4+a^2+c^2}\right)\left(\frac{12+2\cdot 3}{2}\right) \ge 9$ 1p

3.



a. Fie $L \in (AB)$ a.î. $m(\measuredangle LDK)=60^0$ 1p

$ADKL$ inscriptibil $\Rightarrow \measuredangle KDA \equiv \measuredangle BLK$, dar $m(\measuredangle KDA)+m(\measuredangle DCB)=180^0$ rezultă

$m(\measuredangle BLK)+m(\measuredangle DCB)=180^0$ 2p

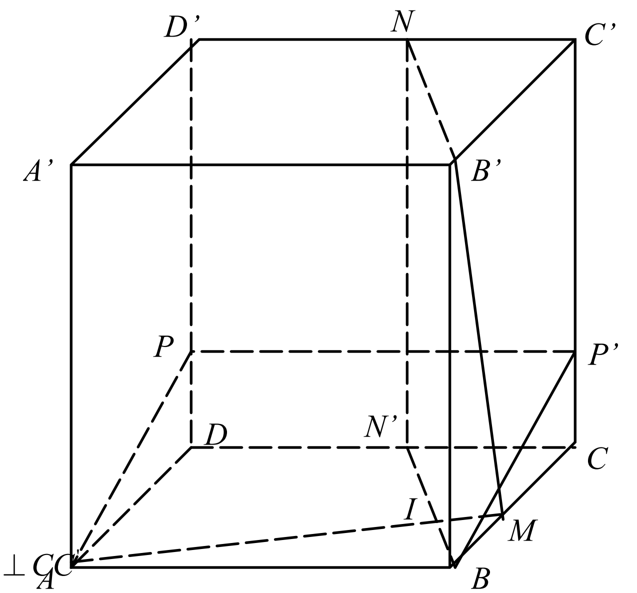
$BCKL$ inscriptibil $\Rightarrow \measuredangle LBK \equiv \measuredangle LCK$ 1p

$m(\measuredangle LCK) = m(\measuredangle LDC) = 60^0 \Rightarrow \Delta LCD$ echilateral..1p

b. $m(\measuredangle LBK) = 60^0 \Rightarrow$ coarda $[LK]$ este latura unui triunghi echilateral înscris în cerc,

deci $LK = R_1\sqrt{3}$, $R_1 =$ raza cercului circumscris Δ-ului BKC 1p

Analog în cercul circumscris Δ-ului $ADK \Rightarrow LK = R_2\sqrt{3} \Rightarrow R_1 = R_2$ 1p



4. „$\Rightarrow$”

Fie $NN' \perp DC, PP' \perp CC'$

$AM \perp (BNB') \Rightarrow AM \perp BN'$

$AM \cap BN' = \{I\}$ şi $\measuredangle N'IM \equiv \measuredangle N'CM \Rightarrow IMCN'$ inscriptibil $\Rightarrow \measuredangle CN'B \equiv \measuredangle AMB$ 1p

$\Delta AMB \equiv \Delta BN'C \Rightarrow AB = BC$ 1p

Analog $B'M \perp BP' \Rightarrow \Delta BB'M \equiv \Delta BCP' \Rightarrow BC = BB'$ 1p

$AB = BC = BB' \Rightarrow ABCDA'B'C'D'$ cub...1p

„$\Leftarrow$”

$\Delta ABM \equiv \Delta BN'C \Rightarrow \measuredangle AMB \equiv \measuredangle BN'C \Rightarrow IMCN'$ inscriptibil $\Rightarrow m(\measuredangle N'IM) = 90^0$ 1p

$AM \perp BN', AM \perp BB' \Rightarrow AM \perp (BB'N)$ 1p

Analog $B'M \perp (ABP)$ 1p