Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXVI-a, Târgu-Mureş, 1–3 aprilie 2011

Clasa a VII-a

1. Să se determine numerele prime a şi b astfel încât numărul $N = a^{a+1} + b^{b+1}$ să fie un număr prim.

Andrei Horvat-Marc

2. Să se arate că numărul $x = \sqrt{2^{2009} + 5^{2009} + 6^{2009}}$ este iraţional.

Gazete Matematică 5/2010

3.Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral de înăţime h. Notăm cu h_1, h_2, h_3 distanţele de la M la laturile triunghiului.
a) Demonstraţi că $h = h_1 + h_2 + h_3$. b) Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{h-h_1}{h+h_1} + \frac{h-h_2}{h+h_2} + \frac{h-h_3}{h+h_3} \geq \frac{3}{2}.$$

Vasile Gînţă

4. Fie ABC un triunghi oarecare şi P un punct în planul său. Notăm cu G_A, G_B respectiv G_C centrele de greutate ale triunghiurilor PBC, PCA respectiv PAB. Fie A_1 un punct oarecare în interiorul segmentului PA. Presupunem că: A_1G_C intersectează segmentul PB în punctul B_1 situat în interiorul acestuia, B_1G_A intersectează segmentul PC în punctul C_1 situat în interiorul acestuia, C_1G_B intersectează segmentul PA în punctul A_2 situat în interiorul acestuia. Analog cu construcţia punctelor B_1, C_1, A_2 obţinem punctele $B_2 = A_2G_C \cap [PB]$, $C_2 = B_2G_A \cap [PC]$, $A_3 \in C_2G_B \cap [PA]$. Să se demonstreze că punctul A_3 coincide cu punctul A_1.

Daniel Văcăreţu

CLASA A VIII-A

1. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi n cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Definim $d(x) = x - n$, dacă $n \leq x < n + \frac{1}{2}$ şi $d(x) = n + 1 - x$, dacă $n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1$. Rezolvaţi în numere reale sistemul

$$\begin{cases} d(x+y) = 0,4 \\ d(x) + d(y) = 0,6 \end{cases}.$$

Dorel I. Duca

2. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care partea întreagă a numărului $\sqrt{n+1+\sqrt{n}}$ este diferită de partea întreagă a numărului $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$.

Andrei Horvat-Marc

3. Fie $x, y, z, t > 0$. Demonstraţi că

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} > 2.$$

Gazeta Matematică nr. 11/2010

4. Fie $ABCD$ un tetraedru de volum $\sqrt{3}/2$ cu proprietatea că

$$AB + \frac{AC}{2} + \frac{CD}{3} = 3$$

şi $\measuredangle BAC = 60^0$. Demonstraţi că $\measuredangle BDC = 30^0$.

Cristinel Mortici