Al IX-lea Concurs Naţional de Matematică "Alexandru Myller"
2 aprilie 2011

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie p un număr natural prim. Determinaţi numărul perechilor (x, y) de numere naturale care verifică egalitatea $\sqrt{x^2 + p^4} = y$.

Problema 2. Fie mulţimile

$$A = \left\{(x; y) \mid 0 < x \leq y < 1; x + y \geq 1; xy \leq \frac{1}{4}\right\},$$
$$B = \left\{(x; y) \mid 0 < x \leq y < 1; x + y \leq 1; xy \geq \frac{1}{4}\right\}.$$

a) Să se arate că mulţimea A are cel puţin 2011 elemente.
b) Să se determine mulţimea B.

Problema 3. a) Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ în care $\{O\} = AC \cap BD$ şi $\{Q\} = AD \cap BC$. Demonstraţi că dreapta OQ conţine mijloacele bazelor trapezului.

b) Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 90^o$ şi $AB < AC$. Punctele M şi N sunt situate pe laturile $[AB]$ şi respectiv $[AC]$ astfel încât $AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Paralela prin punctul M la dreapta BC intersectează $[AC]$ în punctul P. Dacă $\{O\} = BP \cap CM$, arătaţi că $AO \perp MN$.

Problema 4. În interiorul unui pătrat de latură 1 se află un patrulater convex de arie $\frac{1}{2}$. Demonstraţi că există o dreaptă d paralelă cu una dintre laturile pătratului care intersectează patrulaterul şi determină cu laturile acestuia un segment cu lungimea mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numărul real a cu proprietatea că

$$\left(a^2 + 2a - 3\right)^3 + \left(a^2 - 2a - 15\right)^3 = 8\left(a^2 - 9\right)^3.$$

Problema 2. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură 1. Punctele M, N, P şi Q sunt situate pe laturile $(AB), (BC), (CD)$ şi respectiv (DA). Demonstraţi că perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este mai mare sau egal cu $2\sqrt{2}$.

Problema 3. Fie x un număr iraţional. Se ştie că 36 este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că numărul x^{36} este raţional. Determinaţi numărul de elemente raţionale din mulţimea $A = \{x^{a \cdot b} \mid a + b = 36, a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

Problema 4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă. Arătaţi că dacă dreptele $A'B, B'C$ şi $C'A$ sunt perpendiculare două câte două, atunci $AB = BC = CA = AA'\sqrt{2}$.