CLASA A VII-A - barem de corectare

Problema 1. *Soluţie.* Relaţia din enunţ se mai scrie $p^4 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$ **1p**

deci avem cazurile $y - x = 1$ şi $y + x = p^4$, de unde $(x;y) = \left(\dfrac{p^4-1}{2}; \dfrac{p^4+1}{2}\right)$ pentru $p > 2$. **2p**

$y-x=p$ şi $y+x=p^3$, de unde $(x;y) = \left(\dfrac{p^3-p}{2}; \dfrac{p^3+p}{2}\right)$, pentru oricare p prim. **2p**

$y-x=p^2$ şi $y+x=p^2$, de unde $(x;y) = (0;p^2)$, pentru oricare p prim. **1p**

Deci, pentru p număr prim impar, avem câte trei soluţii iar pentru $p=2$, avem două soluţii. **1p**

Problema 2. *Soluţie.* a) $x = \dfrac{1}{2} + a, y = \dfrac{1}{2} + b$ şi $x + y \geq 1$ implică $a + b \geq 0$. (1) **1p**

Deoarece $xy \leq \dfrac{1}{4}$, rezultă că $\dfrac{1}{4} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} + ab \leq \dfrac{1}{4}$, de unde $\dfrac{a+b}{2} + ab \leq 0$ şi, ţinând cont de (1), rezultă că $ab \leq 0$. **1p**

Considerăm $a \leq 0, b \geq 0$ şi luăm $a = -c$, cu $c \geq 0$. Cum $a + b \geq 0$, atunci $b \geq c$ şi alegem $c \geq \dfrac{b}{2b+1}$. **2p**

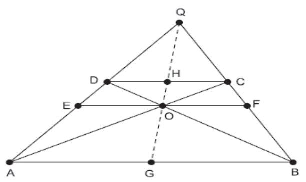
b) Deoarece $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{1}{2}$ **1p**

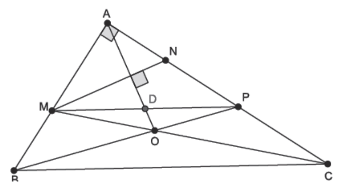
atunci $xy \leq \dfrac{1}{4}$ şi cum $xy \geq \dfrac{1}{4}$ **1p**

deducem că are loc egalitatea în inegalitatea mediilor. Deci $x = y = \dfrac{1}{2}$. **1p**

Problema 3. *Soluţie.* a) Considerăm paralela prin punctul O la bazele trapezului. Aceasta intersectează segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ în punctele E şi F. Perechile $(\Delta AOE; \Delta ACD)$, $(\Delta AOB, \Delta COD)$ şi $(\Delta BOF, \Delta BDC)$ sunt formate din triunghiuri asemenea. Obţinem succesiv: $\dfrac{OE}{DC} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{OF}{DC}$. Deducem că $[OE] \equiv [OF]$. **1p**

Fie $\{H\} = QO \cap CD$ şi $\{G\} = QO \cap AB$. Triunghiurile QDH şi QEO sunt asemenea, deci $\dfrac{DH}{EO} = \dfrac{QH}{QO}$. Triunghiurile QCH şi QFO sunt asemenea, deci $\dfrac{CH}{FO} = \dfrac{QH}{QO}$. Prin urmare, $[DH] \equiv [HC]$. Analog, obţinem $[GA] \equiv [GB]$. **2p**





b) Relaţia din enunţ se mai scrie $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$, de unde $\Delta AMN \sim \Delta ACB$. **1p**

Rezultă că $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle APM$. **1p**

Dacă $\{D\} = AO \cap MP$ atunci, conform a), rezultă că $[AD]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul AMP. Înseamnă că $\sphericalangle APM \equiv \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle AMN$. **1p**

Deducem că $AO \perp MN$. **1p**

Problema 4. *Soluţie.* Fie $EFGH$ patrulaterul de arie $\dfrac{1}{2}$ situat în interiorul pătratului $ABCD$ de latură 1. Prin punctele E şi G ducem paralelele EJ şi GI la dreapta BC, unde $J \in [FG]$ şi $I \in [EH]$. Se formează două triunghiuri şi un trapez cu înălţimile FK, HM şi respectiv JL. **2p**

Presupunem că $EJ < \dfrac{1}{2}$ şi $GI < \dfrac{1}{2}$. Atunci $A_{EFGH} = A_{FEJ} + A_{EJGI} + A_{HGI} <$

$\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{FK}{2} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{JL}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{HM}{2} < \dfrac{1}{2} \cdot (FK + JL + HM) < \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$ – fals **4p**

Rezultă că $EJ \geq \dfrac{1}{2}$ sau $GI \geq \dfrac{1}{2}$. **1p**

Cazurile când una sau mai multe laturi ale patrulaterului $EFGH$ sunt paralele cu laturi ale pătratului $ABCD$ se tratează asemănător.