

Clasa a VII-a

1. Fie x și y două numere reale cu proprietatea că $x + y \geq 2$.
 Arătați că $x^2 + y^2 \geq x + y$. Când are loc egalitatea?
2. Să se determine numerele prime a, b, c și A , știind că $A = a^4 + b^4 + c^4 - 3$.
3. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2010} \in \{-1, 0, 1\}$, astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_{2010} = 1$.
 a) Calculați $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2010}^3$.
 b) Determinați numărul de valori diferite pe care le poate lua suma
 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2010}^2$.
4. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = AC$ și M este mijlocul segmentului BC . Punctele D și E sunt picioarele perpendiculelor din M pe dreptele AC , respectiv AB , iar H este mijlocul segmentului $[DE]$. Fie punctele $P, Q \in BC$ astfel încât $MQ = MP = MD$ și $P \in (BM)$. Arătați că punctul H este ortocentrul triunghiului APQ .

Barem de corectare și notare, clasa a VII-a

- Soluție.* Observăm că cel puțin unul dintre numerele x sau y este mai mare sau egal cu 1 **1p**
 Dacă $x, y \geq 1$, concluzia este evidentă. În caz contrar, fie $x = 1 + a, a \geq 0$ și $y = 1 - b, b \geq 0$. Deducem că $a \geq b$ **2p**
 Au loc relațiile
 $x^2 + y^2 - (x + y) = (1 + a)^2 + (1 - b)^2 - (2 + a - b) = a^2 + b^2 + (a - b) \dots$ **2p**
 Deci, $x^2 + y^2 \geq x + y$ **1p**
 Egalitatea are loc atunci când $a = b = 0$, deci pentru $a = b = 1$ **1p**
- Soluție.* Numerele a, b și c nu pot fi toate impare **1p**
 Dacă, de exemplu, $c = 2$, atunci numărul $A = a^4 + b^4 + 13$ trebuie să fie prim **1p**
 Dacă a și b sunt diferite de 5, atunci ultima cifră a numerelor a^4 și b^4 este 1, deci numărul A se divide cu 5 - fals **2p**
 Deducem că unul dintre numerele a sau b este egal cu 5, de exemplu $b = 5$.
 Numărul $A = a^4 + 638$ trebuie să fie prim **1p**
 Dacă $a \neq 3$, atunci $a^4 = 3k + 1$, deci $3|A$, fals **1p**
 Deci $a = 3$ și $A = 719$ care este număr prim **1p**
- Soluție.* a) Deoarece $a_i^3 = a_i$, oricare ar fi $i = 1, 2, 3, \dots, 2010$, rezultă că
 $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{2010}^3$ **3p**
 b) Suma $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2010}^2$ are numai valori impare pozitive. Rezultă că valorile acestei sume fac parte din mulțimea $\{1, 3, 5, \dots, 2009\}$ **2p**
 Fiecare dintre elementele mulțimii precedente se poate obține: dacă $2n + 1$ este un număr din $\{1, 3, \dots, 2009\}$, luăm $a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 1, a_{n+2} = a_{n+3} = \dots = a_{2n+1} = -1$ și fiecare din celelalte numere egale cu 0 **2p**
- Soluția 1.*
 Avem: $\text{tg}(\angle HQM) = \frac{HM}{HQ} = \frac{HM}{MD} = \sin(\angle HDM) = \sin(\angle MAD)$ **2p**
 Dar $\sin(\angle MAD) = \frac{MD}{MA} = \frac{MQ}{MA} = \text{tg}(\angle MAQ)$ **2p**,
 deci $\angle HQM \equiv \angle MAQ \equiv \angle MAP$ **1p**
 Rezultă $QH \perp AP$. Cum $H \in AM$ și $AM \perp BC$, reiese concluzia. **2p**
- Soluția 2.* Este adevărată egalitatea $\frac{MQ}{AM} = \frac{HM}{MQ}$, întrucât ea revine la $MD^2 = AM \cdot HM$, adică la teorema catetei în triunghiul DAM **3p**
- Atunci triunghiurile MAQ și MQH sunt asemenea **1p**
 și soluția continuă ca mai sus **1p+2p**