

NEAMT **OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ 12 FEBRUARIE 2011**

**CLASA a VII-a**

1. Fie  $m, n, p, q \in \mathbf{Z}$  astfel încât  $a=mn + pq$ ,  $b=mq + np$  și  $c=m - p$ .
- a) Arătați că pentru  $m=9$  și  $p=2$  este adevărată propoziție „dacă  $c$  divide  $a$  atunci  $c$  divide  $b$ ”.
- b) Demonstrați că pentru orice numere  $m, n, p, q$  este adevărată propoziție „dacă  $c$  divide  $a$  atunci  $c$  divide  $b$ ”.

2. a) Se consideră numerele:  $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{119}{120}$  și  $b = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{60}}{2}$ . Calculați media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$ .

- b) Determinați mulțimea  $A = \left\{ a \in \mathbf{Z} / \frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{19+8\sqrt{3}} - \sqrt{16-8\sqrt{3}}}{2a+1} \in \mathbf{Z} \right\}$ .

3. Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $D$  și  $E$  astfel încât  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$  și  $\frac{AD}{BD} = \frac{CE}{AE}$ .

Paralela prin  $E$  la  $BC$  intersectează  $AB$  în  $F$ . Demonstrați că:

- a) segmentele  $AB$  și  $DF$  au același mijloc;
- b) mijloacele segmentelor  $AB$ ,  $AC$  și  $DE$  sunt coliniare.
4. Fie un triunghi oarecare  $ABC$ ,  $[AD]$  bisectoarea unghiului  $A$  și  $[AE]$  bisectoarea unghiului  $BAD$ . Să se arate că  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{DC}{AC \cdot DE}$ .

**CLASA a VIII-a**

1. Fie numerele reale  $x$  și  $y$  astfel încât  $x-y+1=0$  și  $y \in [1;3]$ . Să se arate că  $\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = 2\sqrt{2}$ .

2. Să se arate că, dacă  $x, y, z, m \in \mathbf{R}$  astfel încât  $x+y+z=m$  și  $x^2+y^2+z^2=m^2$ , atunci  $\frac{x \cdot y}{x+y} + \frac{x \cdot z}{x+z} + \frac{y \cdot z}{y+z} + m = 0$ .

3. Fie  $x, y, z$  numere reale pozitive.

a) Arătați că  $\frac{x}{x^2+yz} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ .

b) Demonstrați că  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{x}{x^2+yz} + \frac{y}{y^2+xz} + \frac{z}{z^2+xy}$ .

4. Fie  $SABC$  o piramidă triunghiulară regulată, cu baza  $ABC$ ,  $M$  mijlocul laturii  $(AC)$ ,  $m(\angle BSM)=90^\circ$ ,  $SA=a$  și  $AB=b$ .

a) Găsiți o relație între  $a$  și  $b$ .

b) Calculați distanța de la  $M$  la  $(SAB)$ .

c) Calculați sinusul unghiului format de planele  $(SAB)$  și  $(SMB)$ .