Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA A VII-a

Problema 1. Determinaţi numerele naturale r cu proprietatea că există numerele naturale prime p şi q astfel încât $p^2 + pq + q^2 = r^2$.

Problema 2. În patrulaterul convex $ABCD$ avem $m(\angle BCD) = m(\angle ADC) \geq 90°$. Bisectoarele unghiurilor BAD şi ABC se intersectează în M. Demonstraţi că dacă $M \in CD$, atunci M este mijlocul lui $[CD]$.

Problema 3. Numerele x, y, z, t, a şi b sunt naturale şi nenule. Ştiind că $xt - yz = 1$ şi $\frac{x}{y} > \frac{a}{b} > \frac{z}{t}$, demonstraţi că $ab \geq (x + z)(y + t)$.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\angle ABC) = 60°$. Punctele M şi D sunt situate pe laturile (AC) , respectiv (AB), astfel încât $m(\angle BCA) = 2m(\angle MBC)$ şi $BD = MC$. Determinaţi măsura unghiului $\angle DMB$.

CLASA A VIII-a

Problema 1. Deteterminaţi numerele $x, y, z, t \in [0, \infty)$ ştiind că verifică simultan relaţiile

$$x + y + z \leq t,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq t \text{ şi } x^3 + y^3 + z^3 \leq t.$$

Problema 2. Fie a, b, c numere întregi nenule, distincte două câte două.
a) Demonstraţi că $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq 9$.
b) Dacă, în plus, $ab + ac + bc + 3 = abc > 0$, arătaţi că

$$(a - 1)(b - 1) + (a - 1)(c - 1) + (b - 1)(c - 1) \geq 6.$$

Problema 3. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC de centru O. Punctele I şi H sunt centrul cercului înscris şi respectiv ortocentrul triunghiului VBC. Ştiind că $AH = 3 \cdot OI$, determinaţi măsura unghiului dintre muchia laterală a piramidei şi planul bazei.

Problema 4. Un număr natural se numeşte *tipic* dacă suma cifrelor din scrierea sa în baza 10 este multiplu al numărului 2011.

a) Arătaţi că există o infinitate de numere tipice care au, fiecare, cel puţin câte 2011 multipli care sunt, la rândul lor, numere tipice.

b) Există un număr tipic pentru care orice multiplu nenul al său este număr tipic?