

CLASA a VII-a – BAREMURI

1. **Soluție.** Relația din enunț este echivalentă cu $(p + q)^2 = r^2 + pq$, care devine $(p + q + r)(p + q - r) = pq$ **2 p**
 Cum divizorii numărului pq sunt $1, p, q$ și pq , iar $p + q > \max\{p, q\}$, rezultă că $p + q - r = 1$ și $p + q + r = pq$ **2 p**
 Prin adunarea ultimelor două relații, obținem $2p + 2q = pq + 1$, **1 p**
 echivalent cu $(p - 2)(q - 2) = 3$ **1 p**
 Obținem $(p, q) \in \{(3, 5), (5, 3)\}$. În fiecare caz, rezultă $r = 7$ **1 p**
2. **Soluție. Cazul I.** Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, atunci punctul M este centrul cercului înscris în triunghiul ABE **1 p**
 Rezultă că semidreapta $(EM$ este bisectoarea unghiului AEB **1 p**
 Deoarece unghiurile ECD și EDC sunt congruente, triunghiul EDC este isoscel cu baza $[DC]$ **1 p**
 Prin urmare $[EM]$ este mediană a triunghiului EDC , deci punctul M este mijlocul segmentului CD **1 p**
Cazul II. Dacă $AD \parallel BC$, atunci $m(\angle ADC) = m(\angle BCD) = 90^\circ$, deci $m(\angle MAB) + m(\angle MBA) = 90^\circ$, adică triunghiul MAB este dreptunghic în M **1 p**
 Fie N mijlocul segmentului AB . Rezultă că triunghiul NAM este isoscel cu baza $[AM]$, deci $\angle NMA \equiv \angle NAM \equiv \angle MAD$ **1 p**
 Deoarece unghiurile $\angle NMA$ și $\angle MAD$ sunt alterne interne, rezultă că dreptele MN și AD sunt paralele. Astfel $\frac{MC}{MD} = \frac{NB}{NA} = 1$, adică M este mijlocul segmentului DC **1 p**
3. **Soluție.** Din $\frac{x}{y} > \frac{a}{b}$ rezultă că $xb > ya$, deci $xb - ya \geq 1$. Analog se arată că $at - bz \geq 1$ **3 p**
 Înmulțim prima inegalitate cu t , pe a doua cu y și adunăm relațiile obținute; deducem că $bxt - byz \geq t + y$, adică $b \geq t + y$ **2 p**
 La fel se demonstrează că $a \geq x + z$. Prin înmulțirea acestor inegalități rezultă cerința problemei. **2 p**
4. **Soluție.** Fie punctul G astfel încât $CG = CM$, $C \in (BG)$ și $x = m(\sphericalangle MBC)$. Deoarece triunghiul MCG este isoscel, iar unghiul MCB este exterior acestui triunghi, rezultă că $m(\sphericalangle MGC) = x$. Înseamnă că și triunghiul MBG este isoscel și asemenea cu triunghiul MCG . Deducem că $\frac{BG}{MG} = \frac{MB}{MC} = \frac{MG}{BD}$ **3 p**
 Fie H punctul în care mediatoarea segmentului BG intersectează dreapta AB . Rezultă că triunghiul HBG este isoscel și, având un unghi de 60° , este echilateral. Prin urmare, $\frac{BG}{MG} = \frac{GH}{MB} = \frac{MG}{BD}$ **2 p**
 Cum $m(\sphericalangle MGH) = m(\sphericalangle MBD) = 60^\circ - x$, rezultă că triunghiurile MGH și DBM sunt asemenea, deci $m(\sphericalangle DMB) = m(\sphericalangle MHG) = 30^\circ$ **2 p**